Г. Кнопфель

Сверхсильные импульсные магнитные поля

PULSED HIGH MAGNETIC FIELDS

PHYSICAL EFFECTS AND GENERATION METHODS CONCERNING PULSED FIELDS UP TO THE MEGAOERSTED LEVEL

Heinz KNOEPFEL

Laboratorio Gas Ionizzati (Euratom-CNEN)
Frascati

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM · LONDON 1970

Г. Кнопфель

Сверхсильные импульсные магнитные поля

МЕТОДЫ ГЕНЕРАЦИИ И ФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С СОЗДАНИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ ПОЛЕЙ МЕГАЭРСТЕДНОГО ДИАПАЗОНА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО Ф. А. НИКОЛАЕВА и Ю. П. СВИРИДЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА
1972

УДК 538.12

В книге рассмотрены теоретические и экспериментальные аспекты проблемы получения импульсных магнитных полей в основном мегаэрстедного диапазона.

Детально обсуждаются вопросы диффузии магнитного поля и пондеромоторных сил, принципы работы и основы конструирования импульсных магнитных систем, методы диагностики, системы, обеспечивающие необходимую энергетику.

Книга представляет интерес для научных работников и инженеров, занимающихся расчетом, конструированием и применением магнитных систем, а также преподавателей и студентов физических и энергетических специальностей.

Инд. 2-3-6
46-72

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая вниманию советского читателя книга посвящена рассмотрению принципиальных и практических вопросов генерирования импульсных магнитных полей экстремально высокой напряженности (до десятков миллионов эрстед).

Прогресс физики и техники магнитных полей предельной напряженности, помимо общенаучного интереса, представляется существенным также и для дальнейшего развития многих разделов современной физики, поскольку такие поля позволяют получать огромные концентрации энергии. Достаточно отметить, что давление, создаваемое магнитным полем напряженностью 10 МЭ, составляет около 4 млн. атм, т. е. превосходит давление в центре Земли и соответствует плотности энергии свыше 10^5 Дж/см^3. Отсюда очевидна важность использования сильных и сверхсильных магнитных полей в решении проблем термоядерного синтеза и физики плазмы, астрофизики и геофизики, физики твердого тела и ядерной физики, а также в ряде других задач физики энергий высоких плотностей, где сильные и сверхсильные магнитные поля являются важным, а порой и единственным «инструментом» исследования. Кроме того, интересны и технологические приложения сверхсильных магнитных полей, например точная штамповка поверхностей сложной формы.

История проблемы генерирования сильных и сверхсильных магнитных полей, после первых блестящих работ П. Л. Капицы (1923 г.) [1], насчитывает несколько десятилетий. Однако накопившийся за это время богатый экспериментальный и теоретический материал разбросан по многочисленным публикациям в периодической печати и внутренним отчетам различных лабораторий.

Имеющаяся в этой области физики монографическая литература на русском языке в основном посвящена классическим методам создания постоянных и импульсных магнитных полей напряженностью менее 1 МЭ, а также рассмотрению сверхпроводящих магнитных систем (достаточно подробное описание этих методов и связанных с ними проблем можно найти, например, в монографии [2]) [1]).

Разрабатываемый в последние годы магнитокумулятивный (взрывной) метод генерирования сверхсильных магнитных полей предложенный и обоснованный в 1951 г. А. Д. Сахаровым [4], был впервые в СССР реализован Р. З. Людаевым, Е. А. Феоктистовой, Г. А. Цырковым и А. П. Чвилевым весной 1952 г., Помимо частных публикаций, этот метод обсуждался только в обзорах А. Д. Сахарова [5] и Ф. Биттера [6], опубликованных в 1966 и 1965 гг. соответственно, причем в последнем обзоре принципы и возможности этого метода рассматривались в научно-популярной форме. В то же время только этим методом на современном этапе развития физики и техники сверхсильных магнитных полей удается получать рекордные по напряженности магнитные поля — до 25 МЭ [5].

Существующий в отечественной литературе пробел не ликвидирует вышедшая из печати в конце 1970 г. монография под редакцией В. С. Комелькова «Техника больших импульсных токов и магнитных полей» [7], в которой специфические задачи физики генерирования магнитных полей предельных значений практически не рассматриваются, что, по-видимому, и не входило в задачу авторов. Основное внимание в этой монографии уделено генераторам мощных токовых импульсов и соленоидальным магнитным системам, работающим с конденсаторной батареей. Вопросу создания постоянных и импульсных полей большой длительности (0,1—1 с) посвящена книга Д. Б. Монтгомери, перевод которой выпущен недавно издательством «Мир» [9].

Поэтому выход в свет перевода книги Г. Кнопфеля, являющейся первой попыткой систематического изложения проблем и возможностей различных методов генерирования магнитных полей экстремально высоких напряженностей, в том числе и магнитокумулятивных, представляется весьма своевременным и, безусловно, будет способствовать развитию исследований, проводимых в этой области физики.

Д-р Гейнц Кнопфель хорошо известен среди специалистов, занимающихся как вопросами, связанными с физикой и техникой сильных и сверхсильных магнитных полей, так и физикой высоких плотностей энергии. Он создатель и бессменный руководитель весьма активно работающей группы в Лаборатории ионизованных газов во Фраскати (Италия). Этой группой выполнено большое число работ по исследованию различных методов создания сверхсильных магнитных полей, которые стимулировали и ряд теоретических исследований. (На эти работы имеются много-

---

[1]) Полная библиография по физике и технике сильных магнитных полей, охватывающая период с 1873 по 1968 год, собрана в работе [3].

численные ссылки в книге.) Особенно широко известны работы этой группы по использованию магнитокумулятивных генераторов; это, пожалуй, единственная группа, стабильно получающая поля с напряженностью до 6 МЭ и проведшая ряд физических исследований в этом диапазоне магнитных полей.

Г. Кнопфель известен и как организатор и активный участник ряда международных конференций по физике сверхсильных магнитных полей и высоких плотностей энергии.

Безусловно, в книге нашли отражение в первую очередь собственные представления и склонности автора, его личный опыт—опыт экспериментатора, знающего все «подводные камни» и «слабые» места взрывомагнитных систем. Все это в сочетании с живостью изложения и простотой используемых моделей и представлений, свойственной автору, делает книгу доступной и для неспециалистов.

Не вдаваясь в детальный разбор предлагаемой читателю книги, следует отметить, что в ней обсуждаются также и некоторые избранные вопросы развивающейся в последние годы физики высоких плотностей энергии, в частности вопросы поведения металлических проводников в сверхсильных магнитных полях (гл. 10). Читателю, интересующемуся проблемами физики высоких плотностей энергии, для более детального ознакомления с ними можно рекомендовать сборник прекрасных обзорных докладов, сделанных в школе им. Энрико Ферми в Варенне (Италия) в 1969 г. [8].

Хотя книга Кнопфеля и не лишена недостатков — в первую очередь это определенная «субъективность» изложения, обусловленная в значительной степени тем, что автор в последние годы много и плодотворно работал в данной области физики,— она, несомненно, принесет большую пользу советскому читателю.

При подготовке к изданию перевода книги на русский язык было решено сохранить структуру изложения автора, обозначения и определенный произвол в использовании систем единиц, что, если и не оправдывается, то объясняется некоторой инерцией в применении в лабораторной практике систем единиц, которые постепенно выходят из употребления.

Перевод сделан без каких-либо сокращений, хотя некоторые вопросы, особенно из обсуждаемых в первых главах, достаточно подробно освещены во многих монографиях и учебниках. С нашей точки зрения, исключение этих разделов существенно сказалось бы на цельности изложения и затруднило бы чтение книги для тех читателей, которые впервые знакомятся с физикой сильных и сверхсильных магнитных полей.

Отбор материала, а также метод и стиль его изложения в книге позволяют надеяться, что она будет интересна и полезна для научных работников и инженеров, специализирующихся в области физики плазмы, физики твердого тела, ядерной физики, работающих в некоторых отраслях промышленности, энергетике, а также для преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов университетов, инженерно-физических и энергетических вузов.

Ф. Николаев

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капица П. Л.* Proc. Cambr. Phil. Soc. **21**, 511 (1923); Proc. Roy. Soc., **A105**, 191 (1924); **A109**, 224 (1925); **A115**, 658 (1927).
2. *Карасик В. Р.*, Физика и техника сильных магнитных полей, изд-во «Наука», 1964.
3. *Смирнов С. А.*, *Георгиевский А. В.*, *Юштина В. М.*, Физика и техника сильных магнитных полей (Сборник рефератов), 2-е изд., Атомиздат, 1970.
4. *Сахаров А. Д.*, *Людаев Р. З. и др.*, ДАН СССР, **165**. 65 (1965).
5. *Сахаров А. Д.*, УФН, 88, 725 (1966).
6. *Bitter F.*, Sci. Amer., **213 (1)**, 65 (1965). [См. перевод: *Ф. Биттер*, УФН, 88, 735 (1966).]
7. *Дашук П. Н.*, *Зайенц С. Л. и др.*, Техника больших импульсных токов и магнитных полей, Атомиздат, 1970.
8. Physics of High Energy Density, Proc. Inter. School of Phys. «Enrico Fermi», Ed. by P. Caldirola and H. Knoepfel, New York — London, 1971.
9. *Монтгомери Д. Б.*, Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов, изд-во «Мир», 1972.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Как известно, прогресс в области создания и использования импульсных сильных и сверхсильных магнитных полей существенно определялся вкладом советских ученых, начиная с основополагающих работ П. Л. Капицы, выполненных в двадцатых годах, и кончая интенсивными исследованиями взрывных методов создания сверхсильных магнитных полей, проведенными в пятидесятых годах группой А. Д. Сахарова из Института атомной энергии им. И. В. Курчатова. Все это, безусловно, определило ту заинтересованность, с которой я встретил сообщение о подготовке русского издания моей книги. Хочу надеяться, что это издание будет полезным для всех тех, чей интерес к этой области обусловлен как прикладными, так и физическими задачами.

Я хотел бы поблагодарить Ф. Николаева за труд и время, потраченные им на подготовку русского издания.

Фраскати, август 1971 г. *Гейнц Кнопфель*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель данной книги — впервые представить читателю в исчерпывающем объеме проблемы, связанные с созданием и использованием переменных магнитных полей в диапазоне напряженностей от килоэрстед до мультимегаэрстед с длительностью импульса обычно короче 0,1 с.

Импульсные магнитные поля находят все более широкое применение при проведении лабораторных исследований. Это обусловлено отчасти тем, что генерирование импульсных магнитных полей осуществляется значительно более простыми методами, чем постоянных, а современная диагностическая техника, обладающая необходимым временны́м разрешением, позволяет использовать импульсные поля без серьезных экспериментальных затруднений. Кроме того, необходимые поля напряженностью свыше 300—500 кЭ практически могут быть только переменными. И наконец, ряд экспериментов, как, например, исследования в области контролируемого термоядерного синтеза, часто проще проводить в переменных магнитных полях.

Книга адресована в первую очередь физикам и инженерам-электрикам, работающим в области сильных магнитных полей. Однако в связи с тем, что при ее написании автор стремился к замкнутости изложения на относительно элементарной основе, она может быть полезной также для студентов и научных работников, которые впервые знакомятся с проблемой получения и использования сильных и сверхсильных магнитных полей, а также для тех, для кого эти проблемы лежат в стороне от основных научных интересов.

Эта книга является результатом попытки экспериментатора изложить теоретические и экспериментальные проблемы, возникающие при работе с сильными магнитными полями, и основана на личном опыте автора, проработавшего в течение последних девяти лет в качестве руководителя группы, имеющей непосредственное отношение ко всем обсуждаемым в книге методам генерации импульсных магнитных полей.

Обширность проблемы требовала тщательного отбора обсуждаемых вопросов. Предварительные рассмотрения, посвященные физике проблемы, как правило, проводятся на элементарной, наглядной основе. Действительно, если некоторая задача может быть рассмотрена или общим, но абстрактным способом, или, наоборот, более ограниченным, но более физически наглядным и, следовательно, в более ясной форме, то выбирался последний. Полезность для экспериментатора была одной из определяющих задач при написании книги, и если эта задача входила в противоречие с краткостью изложения, то последняя приносилась в жертву во имя основной задачи. В результате получилась книга, которая занимает место где-то между справочником и монографией. Как физик, надеюсь, что данная работа частично восполнит имеющийся пробел в этой области знаний.

Текст книги можно разделить на три основные части. В первой, куда входят гл. 1—5, приведены основы электромагнитной теории, необходимые для дальнейшего изложения. После введения в гл. 2 даны элементарные основы теории Максвелла без учета токов смещения; однако основной целью этой главы является введение единым методичным образом ряда соотношений и формул, которые будут интенсивно использоваться в течение всего изложения. В трех следующих главах детально рассматриваются эффекты, связанные с диффузией магнитного поля и магнитными силами. Эти эффекты являются фундаментальными для понимания физики импульсных магнитных систем.

Вторая часть посвящена описанию генераторов импульсных магнитных полей. В гл. 6 и 7 анализируются практически все традиционные системы, но наибольшее внимание уделяется соленоиду с питанием от конденсаторной батареи. Следующие две главы посвящены обсуждению систем с компрессией магнитного потока; в них представлено естественное развитие классических методов. Кроме того, я надеюсь, что обсуждение физических проблем, связанных с генерированием магнитных полей мультимегаэрстедного диапазона, будет стимулировать последующие исследования тех читателей, которые непосредственно не занимаются этой проблемой.

В третью часть входят разнообразные вопросы и смежные проблемы, рассмотренные в двух оставшихся главах и четырех приложениях. Эффекты, связанные с мультимегаэрстедными полями, сделали необходимым введение главы (гл. 10), посвященной физическим свойствам металлических проводников и использованию мощных взрывчатых веществ. В последней главе описываются принципы и техника измерения импульсных магнитных полей.

В приложении 1 собраны полезные формулы для расчета магнитных полей и индуктивностей простых систем проводников. Два последующих приложения посвящены математическому аппарату, использованному в тексте, электромагнитным единицам и коэффициентам перехода между разными системами единиц. В последнем приложении сформулирована задача магнитогидродинамики, описывающая взаимодействие сверхсильного магнитного поля с металлическими проводниками.

И наконец, хотя при отборе материала я и пользовался прерогативой автора и ограничивал число использованных публикаций в тексте, я чувствовал необходимость включения в книгу обширной библиографии, которая для удобства разделена по главам и дана с названиями статей.

Извечная проблема единиц решена рекомендацией использовать рационализированную систему МКС. Тем не менее в лабораторной практике широко используется и практическая система единиц СГС (сантиметр, грамм, секунда, дина, эрг, эрстед, гаусс наряду с ампером, вольтом, генри, кулоном и т. д.), которая также применяется в книге. Некоторые основные уравнения, отмеченные звездочкой, приведены и в этой системе единиц.

Невозможно поблагодарить всех тех, кто прямым или косвенным образом способствовал написанию этой книги. Тем не менее я воспользуюсь предоставленной мне возможностью выразить мою глубокую признательность некоторым из своих друзей и сотрудников. В первую очередь я хочу поблагодарить моих коллег по группе сильных магнитных полей лаборатории ионизованных газов во Фраскати, с которыми я разделял успехи и неудачи в нашей совместной работе, друзей и коллег из различных лабораторий Европы и Америки, а также администрацию и руководство CNEN (Comitato Nazionale Energia Nucleare) и Евратома (European Atomic Energy Comission).

Я не сомневаюсь, что в тексте, формулах и рисунках возможны ошибки и опечатки, и заранее благодарен всем, кто укажет на них; надеюсь, что они будут исправлены в последующих изданиях.

Г. Кнопфель

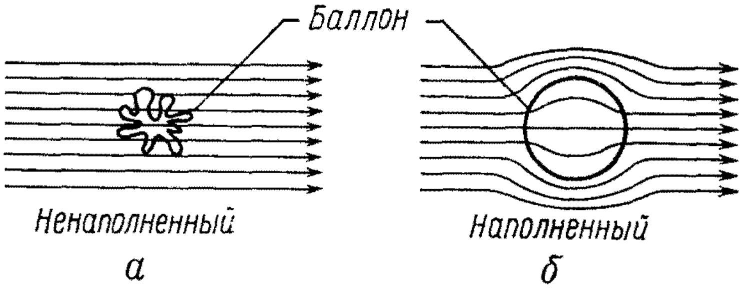
Фраскати, декабрь, 1969 г.

Фиг. 1.1. Вид на оконечную часть установки магнитокумулятивного генератора, служащего для получения сильных магнитных полей, до взрыва и сразу же после взрыва (лаборатория в Коллеферро, см. п. 1.19).

Первая глава Введение

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

1.1. Экспериментально исследованный до настоящего времени диапазон магнитных полей простирается от величин менее 10^{-7} Э до полей свыше 10^{7} Э. Генерация мультимегаэрстедных полей (лежащих у верхней границы этого диапазона) основывается на принципе сжатия магнитного потока и тесно связана с использованием предельно мощных источников энергии, таких, как химические или даже ядерные взрывчатые вещества (фиг. 1.1). Что



Ф и г. 1.2. Метод расширения магнитного потока.

Ненаполненный баллон с ниобиевым покрытием охлаждается до сверхпроводящего состояния (*а*) и затем наполняется (б), вследствие чего магнитное поле (земное) в его внутреннем объеме значительно уменьшается [1.250].
Если действовать в противоположном порядке от (*б*) к (*а*), то получим сжатие магнитного потока; этот способ используется для получения сверхсильных магнитных полей.

касается нижней границы диапазона, то здесь основная проблема заключается в том, чтобы устранить влияние магнитного поля Земли порядка 1 Э. Для этой цели применима обычная техника магнитного экранирования или, что более эффективно, недавно развитый метод, использующий расширение сверхпроводящей оболочки (фиг. 1.2). Интересно отметить, что способы получения сверхсильных и сверхслабых полей аналогичны. Действительно, и в методе сжатия и в методе расширения магнитного потока используются движущиеся проводники для перемещения потока из одной области пространства в другую. Однако существует большое разнообразие и других экспериментальных методов для получения промежуточных значений магнитных полей

Определения. Эффекты взаимодействия

1.2. Основное внимание в этой книге будет сосредоточено на *«импульсных сильных магнитных полях»*. *«Импульсными»* мы будем называть такие кратковременные поля, глубина проникновения (скин-слой) которых меньше поперечных размеров токонесущих проводников. В типичных рассматриваемых случаях длительность импульсов составляет менее 0,01—0,1 с (например, толщина скин-слоя в меди для синусоидального поля с четвертью периода 0,1 с равна 3 см; см. гл. 3). Под словом *«сильные»*

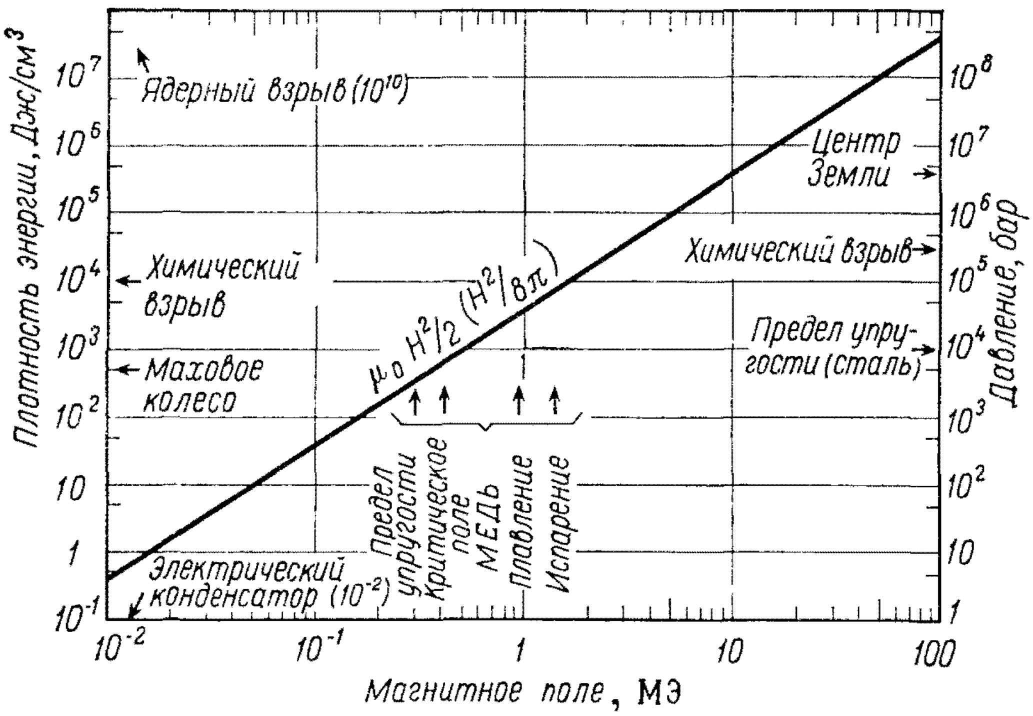
ТАБЛИЦА 1.1

Источники энергии высокой плотности

Первичный источник	Конечная форма	Плотность энергии, МДж/см^3	Энергия на один атом, эВ (элемент)	Полная энергия, МДж	Литература
Химические взрывчатые вещества	—	$8\cdot10^{-3}$	1(H, N, O)	100	—
	Металлические струи	1	1700(Cu)	10^{-3}	[10.103]
	Металлические пластины	0,8	60(Fe)	3	[10.50]
	Поле 1 МЭ	$4\cdot10^{-3}$	0,3(Cu)	5	[1.27]
	Поле 5 МЭ	0,1	8(Cu)	1	[1.27]
	Поле 25 МЭ	2,5	200(Cu)	1	[8.6]
Конденсаторные батареи	—	10^{-8}	—	5	—
	Взрывающиеся проволочки	0,05	4(Cu)	10^{-3}	[10.20]
	Плазменный фокус	0,01	1000(D)	10^{-4}	[1.259]
Оптические источники	—	10^{-6}	—	10^{-3}	[10.152]
	Сфокусированный лазерный пучок	0,4	100(D, T)	10^{-5}	[1.258]
Ядерное взрывчатое вещество (D, T)	—	10^4	$9\cdot10^6$(D, T)	10^{11}	—

мы подразумеваем область магнитных полей, в которой можно пренебречь эффектами намагничивания, т. е. область, простирающуюся от 10—50 кЭ до мультимегаэрстедного уровня. Для большей определенности мы будем использовать термин *«очень сильные»* для магнитных полей напряженностью приблизительно от 200 до 1000 кЭ (т. е. для области, где важное значение приобретают эффекты нагрева и магнитное давление), тогда как термин *«сверхсильные»* оставим для полей в мультимегаэрстедной области.

1.3. Процессы взаимодействия, связанные с магнитными полями, имеют фундаментальное значение почти в любой области физики. Не так давно внимание исследователей было привлечено к эффектам, вызванным действием очень сильных и сверхсильных



Фиг. 1.3. Эффекты, вызываемые сильными магнитными полями.

полей (см., например, [1.27, 1.74, 1.76, 1.100, 1.151]). Типичным примером служит широкое использование таких полей для получения экстремальных температур: ниже 10^{-3} К—методом адиабатического размагничивания полями около 100 кЭ [1.57], выше 5000 К—путем нагрева вихревыми токами, создаваемыми импульсными мультимегаэрстедными полями (см. [4.9] и табл. 1.1). Однако обсуждение этих явлений не является целью данной книги. Мы ограничимся только изучением *взаимодействия сильного импульсного поля с металлическим проводником* (гл. 3 и 4) ввиду его непосредственной важности для практических применений.

С этой точки зрения первые интересные эффекты появляются в диапазоне 0,1—1 МЭ (фиг. 1.3). Вблизи 400 кЭ диффузия магнитного поля (гл. 3, 4) приобретает нелинейный характер, и магнитное давление превышает предел текучести большинства металлов (гл. 5). При поле свыше 800 кЭ начинается плавление поверхности проводника. Фазовый переход металлического проводника становится важным, а зачастую и мешающим эффектом только при сверхсильных импульсных магнитных полях (1—10 МЭ) (гл. 4, 10). В области выше 1,2 МЭ зона плавления металла, подверженного воздействию импульсного поля, быстро проникает в проводник, и при поле выше 1,5 МЭ начинается испарение поверхности проводника. При еще более высоких полях волна испарения проникает в глубь металла, взрывая поверхностный слой; ударная волна быстро распространяется внутрь металла, сжимая его. Например, катушка, создающая поле величиной 2 МЭ, ведет себя так, как если бы внутри ее подрывалось бризантное взрывчатое вещество, заполнявшее всю ее полость. Наконец, в области 5—10 МЭ плотность энергии магнитного поля становится больше энергии связи большинства твердых тел, и магнитное давление достигает значения, существующего в центре Земли.

Будет показано (гл. 4), что имеется определенное соответствие между плотностью тепловой энергии поверхностного слоя проводника и нагревающим его магнитным полем. Некоторые из наиболее высоких плотностей энергии, полученных до сих пор в лабораторных условиях (табл. 1.I), были достигнуты при мегаэрстедных полях, создаваемых магнитокумулятивным способом. Эти результаты открывают особенно заманчивые перспективы для будущего применения сверхсильных магнитных полей [1.75].

1.4. По своему разрушительному характеру генерация мультимегаэрстедных полей, производимая как взрывным, так и классическим способами, представляет типичный образец *одноразового* эксперимента. Под этим выражением мы подразумеваем такое экспериментальное устройство, в котором после каждого измерения уничтожаются наиболее важные узлы и часть измерительной аппаратуры. Такой эксперимент не может быть воспроизведен с абсолютным подобием, и после неудачи не всегда возможно установить место неисправности. Однако опыт исследователя, хорошо разработанные диагностические методы и надежное оборудование могут уменьшить трудности эксперимента.

Если хотя бы в двух из трех экспериментов с генераторами сверхсильных магнитных полей результаты совпадают (и являются разумными), то такие результаты можно считать воспроизводимыми и, следовательно, научно приемлемыми. Само собой разумеется, что эксперимент должен быть точно описан, так чтобы его могли воспроизвести другие исследователи. К сожалению, это требование не всегда выполняется, поскольку работы по исследованию мегаэрстедных полей, создаваемых взрывными генераторами, часто производятся в засекреченных лабораториях (см. фиг. 1.5).

Источники сверхсильных магнитных полей

1.5. Сверхсильные магнитные поля возникают не только при прохождении через металлический проводник тока плотностью порядка многих мегаампер на 1 см (гл. 7—9), но могут быть обнаружены при других условиях и в природе, и в лаборатории.

Наиболее эффективным примером служат небесные тела, сжатые до ядерных плотностей, где, как полагают, существуют поля, близкие к 10^{13} Э. Действительно, при гравитационном коллапсе материал подвергается быстрому линейному сжатию порядка 10^6 или более. Поэтому первоначальное поле в 10 Э могло бы возрасти в результате сжатия магнитного потока (гл. 8) до 10^{13} Э и более, если потери на диффузию остаются относительно умеренными [1.257].

1.6. Колебательные сверхсильные магнитные поля создаются в фокусированном пучке *мощных лазеров*, где плотность энергии излучения равна

$$W = \frac{P}{cS},$$

и поэтому максимальное значение поля $H_{\text{макс}}$ определяется выражением

$$\frac{1}{2}\mu_0 H_{\text{макс}}^2 = \frac{P}{cS},$$

где c — скорость света, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. P — мощность падающего света и S — площадь поперечного сечения сфокусированного пучка, которая в пределе идеальной оптической системы может достигать значения $S \to \lambda^2$ (λ — длина волны). Недавно Басов и сотр. [1.258] получили энергию более 10 Дж в импульсе 10^{-11} с, используя неодимовый лазер в режиме синхронизации мод и с пятью усилительными каскадами; при $P = 10^{12}$ Вт и $S = 10^{-8}$ м^2 получаем $W = 33 \times 10^{10}$ Дж/м^3 и $H_{\text{макс}} = 7{,}3 \cdot 10^8$ А/м, или 9 МЭ.

1.7. Другим примером являются поля сверхтонкой структуры. Значения магнитного поля вблизи ядра свободного атома, создаваемые одним s-электроном, приведены в табл. 1.II; эти значения получены из данных атомной спектроскопии. Положение значительно усложняется, если рассматривать атом, связанный в решетке, например атом ферромагнетика (см. [1.251] или [1.252]). В этом случае взаимодействия s-электрона с его соседями и различные другие эффекты могут совершенно изменить поле сверхтонкой структуры по сравнению с его значением в свободном атоме (поле может иногда уменьшиться до нуля и изменить знак; см., например, [1.253]). Хотя эти сверхсильные поля ограничены малыми объемами в окрестности ядра, можно сказать, что они наиболее часто встречаются в экспериментальной физике, так как неразрывно связаны с измерением сверхтонкого расщепления уровней.

ТАБЛИЦА 1.II

Поля сверхтонкой структуры внешних s-электронов свободных атомов [1.253]

Элемент	Электрон	$-H(0)$, МЭ
H	1 s	0,17
Na	3 s	0,40
Cu	4 s	2,6
Ag	5 s	5,0
W	6 s	9,3
Au	6 s	20
Hg	6 s	24

Постоянные магнитные поля

1.8. Интересно кратко ознакомиться с возможностями и ограничениями методов получения постоянных сильных магнитных полей. Казалось бы, что наиболее очевидным решением было бы создание магнита из *ферромагнетика*. Однако индукция насыщения ферромагнетиков ограничена (для железа величина $B_{\text{макс}}$ составляет около 20 кГс; для диспрозия при температуре ниже его точки Кюри, равной 85 К, она равна приблизительно 40 кГс). Тем не менее этим методом можно получить поля примерно до 50 кЭ, используя заостренные полюсные наконечники для концентрации магнитных силовых линий в межполюсном зазоре. В качестве примера можно упомянуть построенный в 1917 г. Коттоном магнит весом около 100 т, с потребляемой мощностью 100 кВт. Магнит создавал поле величиной 30 кЭ в цилиндрическом объеме длиной 5 см и диаметром 5 см; наибольшая напряженность поля 75 кЭ достигалась при межполюсном зазоре 2 мм и при использовании заостренных наконечников.

1.9. Постоянные магнитные поля до 100 кЭ можно создать в катушках без сердечников при небольших технических усилиях. В последнее время получение таких полей стало еще более доступным в связи с появлением недорогих катушек со *сверхпроводящими обмотками* [1.108].

Технические трудности, встречающиеся при получении полей свыше 100 кЭ, лучше всего понять, если воспользоваться соотношением (2.51) между аксиальным полем H_z и потребляемой мощностью P постоянного магнита для *обычной многовитковой катушки без сердечника*

$$P \geqslant 10^{-6} \frac{\sigma_{Cu}}{\sigma_0} aH_z^2,$$

где a — радиус катушки, σ_0 — удельная электропроводность материала обмотки, σ_{Cu} — удельная электропроводность меди, равная $63 \cdot 10^6$ См·м$^{-1}$ [1]). Для создания поля $H_z = 8 \cdot 10^6$ А/м, т. е. 100 кЭ, типичная медная катушка, охлаждаемая водой ($\sigma_0 \approx \sigma_{Cu}$, $a \approx 0{,}01$ м), потребляет мощность не менее 1 МВт. Генератор постоянного тока, непрерывно вырабатывающий мощность порядка нескольких мегаватт, представляет собой громоздкое сооружение. Стоимость энергии составляет по крайней мере 50 тыс. долл. за 1 МВт.

Потребляемая мощность может быть уменьшена при охлаждении катушки до температуры ниже 100 К; при этом электропроводность чистой меди и алюминия резко возрастает (при 15 К в случае охлаждения жидким водородом электропроводность меди возрастает в 1000 раз!). Очевидно, что установка охлаждения увеличивает общую потребляемую мощность и капитальные затраты, поэтому *магниты, охлаждаемые до сверхнизких температур*, имели бы преимущество перед обычными установками, работающими при комнатной температуре, только в специальных случаях. Диапазон постоянных магнитных полей, создаваемых в настоящее время, простирается до 250 кЭ. Уровень в 500 кЭ представляется технически достижимым уже сегодня, особенно при использовании сочетания сверхпроводящей катушки и магнита, криогенного или охлаждаемого водой [1.59].

1.10. В том случае, когда длительность действия поля не превышает 1 с, а интервал охлаждения между двумя последовательными импульсами значительно больше этой величины, размеры и мощность цепи охлаждения могут быть существенно уменьшены. Такой режим работы становится особенно удобным при использовании магнитов, охлаждаемых до сверхнизких температур [1.79]. Действительно, охладитель уже является частью системы магнита; положение еще более упрощается из-за существенного уменьшения потерь на джоулев нагрев (более подробно см. п. 7.6).

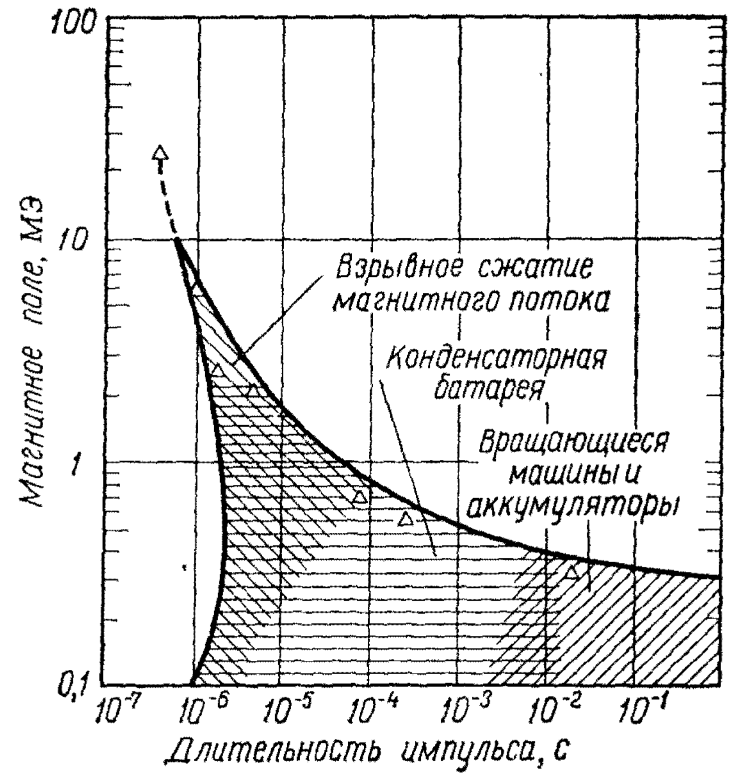
---

[1]) Катушка с внешним радиусом $b = 3a$ и длиной $h = 4a$ ($G_{\text{макс}} = 0{,}143$, $f = 0{,}8$).

Импульсные магнитные поля

1.11. Технические трудности существенно уменьшаются при создании импульсных магнитных полей по крайней мере в диапазоне ниже 1 МЭ. В самом деле, импульсные поля мощностью порядка нескольких мегаватт и длительностью несколько миллисекунд (и менее) могут быть созданы без особых сложностей различными способами (фиг. 1.4 и гл. 6), например разрядом батареи конденсаторов.

При импульсах тока короче 1 мс рассеиваемую в катушках энергию можно ограничить до уровня запасенной магнитной



Фиг. 1.4. Наиболее важные источники энергии, служащие для получения сильных импульсных магнитных полей.

Точки, обозначенные треугольниками, представляют типичные экспериментальные результаты, описанные в гл. 6—9.

энергии (см. 4.12 и 7.4). В связи с этим по отношению к импульсным полям чаще для наглядности употребляют термины энергии, чем мощности; необходимая энергия непосредственно определяется требуемой величиной магнитного поля. Из фиг. 1.3 видно, что, например, поле величиной 0,5 МЭ соответствует плотности энергии 1 кДж$\cdot$см$^{-3}$; поэтому, если даже коэффициент преобразования энергии от батареи конденсаторов к катушке мал (коэффициент преобразования 30—60 % легко достигается при длительностях импульсов до нескольких миллисекунд), конденсаторная батарея энергоемкостью в несколько десятков килоджоулей создаст очень высокие поля в объеме нескольких кубических сантиметров (при стоимости примерно 300 долл. за килоджоуль, см. фиг. 6.1).

1.12. Проблема получения сверхсильных магнитных полей технически более сложна. Действительно, при величине поля выше критического h_c (которая для меди составляет 430 кЭ, см. табл. 10.IV) потери энергии быстро возрастают вследствие увеличения потерь на диффузию (гл. 4). Например, когда импульсное магнитное поле, имеющее вид параболической функции времени

$$\frac{H}{h_c}=\sqrt{\frac{t}{t_0}},$$

приложено к плоской металлической поверхности, поток мощности (вектор Пойнтинга) через поверхность S равен

$$P\approx 0{,}35\sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma_0 t_0}}\,H^2S,$$

что следует из уравнения (4.83) при $H\gg h_c$. Для одновитковой медной катушки с внутренним диаметром 1 см и длиной 1,5 см ($S=5$ см^2), создающей поле $3{,}2\cdot 10^8$ А$\cdot$м$^{-1}$ (т. е. 4 МЭ) в момент времени $t=5$ мкс (т. е. $t_0=0{,}0525$ мкс), получаем $P\approx 10^{10}$ Вт.

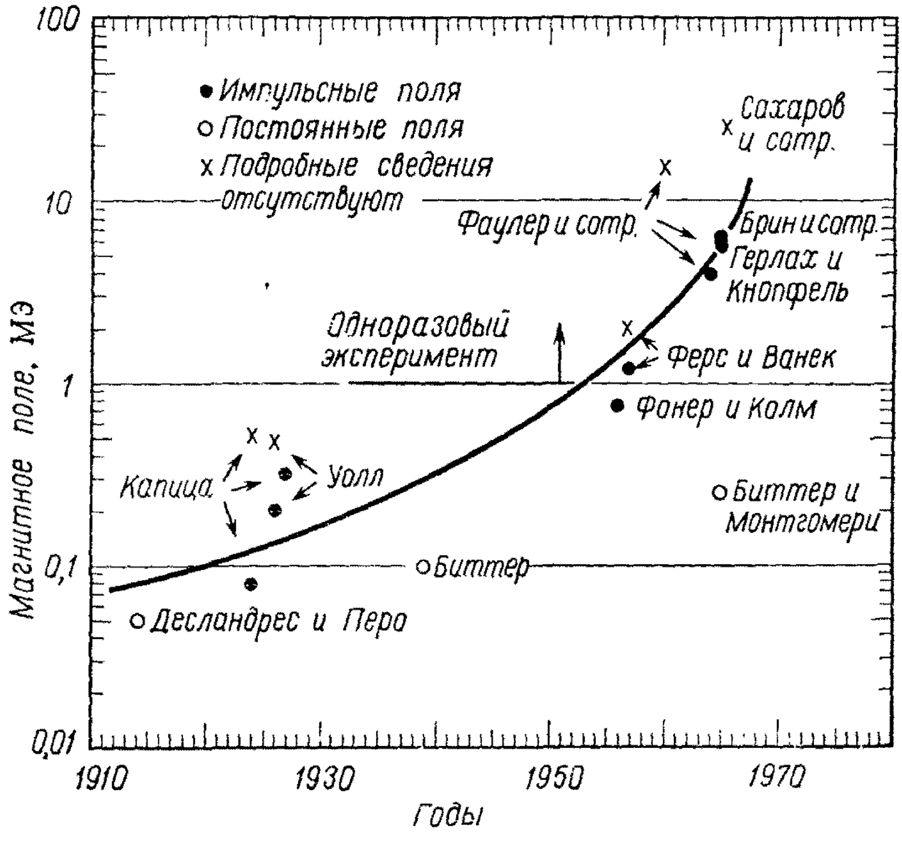
Магнитное давление, создаваемое максимальными импульсными полями порядка 5 МЭ, служит причиной возникновения быстрой ударной волны в проводнике, вызывающей его сжатие. Мощность потерь, вызванных этим эффектом, может превышать мощность потерь вследствие диффузии поля. Поэтому для создания полей порядка 5 МЭ в объеме нескольких кубических сантиметров потребуется пиковая мощность более 10^{11} Вт. Хотя такие мощности еще могут быть в пределе генерированы очень большими батареями конденсаторов (см. табл. 6.II), для этой цели проще использовать взрывные генераторы, работающие по принципу сжатия магнитного потока (гл. 8 и 9).

§ 2. ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЙ СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

1.13. История создания магнитных полей является интересной и волнующей, как история любого научного достижения. Ее следы ведут к Древней Греции. Действительно, слово «magnet» происходит от названия древнего греческого города Магнеса (теперь Манисса, вблизи Смирны, Турция), где были обнаружены большие запасы магнитного железняка. Особые свойства этого материала, его способность притягивать железо и принимать ориентацию север—юг, стали известны как *магнетизм*. Интерес к его исследованию сохранился на многие сотни лет.

1.14. Только гораздо позднее, а именно в первой половине 19 в., в годы бурного технического прогресса, становится возможным более систематическое изучение магнитных явлений. Начало этого периода совпадает с открытием Г. Эрстеда, установившим в 1819 г., что стрелка компаса отклоняется, если поместить ее близи проводника с током. Это открытие заинтересовало математика А. Ампера, и уже через несколько месяцев (1820) исследования привели его к пониманию магнитных явлений, вызываемых электрическим током. Эта работа сделала его «отцом» электромагнетизма. Годом позже (1821) М. Фарадей в своей первой научной работе показал, что «вращение проводника с током вокруг магнита и вращение магнита вокруг проводника с током» аналогичны; через десять лет он сформулировал закон индукции и ввел понятие магнитного поля. Вершиной этого периода дискуссий и открытий явился труд Дж. Максвелла «Трактат по электричеству и магнетизму», опубликованный в 1873 г.

1.15. После того как закладка фундамента классической электродинамики была завершена, вниманием ученых все больше



Фиг. 1.5. Диаграмма развития исследований по сильным магнитным полям, создаваемым с помощью безжелезных магнитов, обычными и взрывными методами (подробные ссылки см. в п. 1.15).

завладевают вопросы практического применения электромагнитных явлений, в особенности проблема генерации сильных магнитный полей в связи с той большой ролью, которую они играют в технике и экспериментальной физике. Ниже приводится подробная хронология истории развития науки и техники сильных магнитных полей, особенно импульсных полей и полей, получаемых без использования ферромагнетиков (см. фиг. 1.5).

1898. *Ч. Фабри* [1.213] теоретически исследует эффективность безжелезных катушек гальванометра; эти результаты, однако, могут быть распространены на мощные мегаваттные магниты.

1914. *Г. Деландрес* и *А. Перо* создают существовавшее в течение многих минут поле величиной 50 кЭ в объеме около 4 см^3, впервые используя безжелезный магнит с водяным охлаждением [1.203—1.205]; эксперименты выполняются в фирме «О Бон Марше» в Париже, где имеется дизельный генератор мощностью 340 кВт.

1924—1927. *П. Л. Капица* [1.202] обсуждает различные способы получения сильных импульсных магнитных полей; подробно описываются опыты на основе использования аккумуляторной батареи [1.200] и позднее мотор-генератора [1.201], с помощью которого создаются поля величиной 320 кЭ в объеме 2 см^3 за время около 2 мс.

1926—1927. *Т. Уолл* [1.206] использует многовитковый соленоид с батареей конденсаторов энергоемкостью 3 кДж при 4 кВ для создания поля 200 кЭ в объеме 0,2 см^3. *Дж. Кокрофт* детально анализирует возможности применения присоединенных к генераторам катушек для создания сильных полей [1.211].

1936—1939. *Ф. Биттер*, вдохновленный посещением Кембриджа (Англия), начинает разрабатывать магниты большой мощности в Массачусетском технологическом институте [1.208, 1.207]. В 1936—1937 гг. на одной из подстанций бостонской фирмы «Эдисон» выполняются первые эксперименты, и на основе этого опыта строятся и начинают действовать в 1939 г. четыре различных магнита, охлаждаемых водой. Катушки, присоединенные к мотору-генератору, способны рассеивать мощность до 1700 кВт и создавать максимальное поле 100 кЭ в объеме около 25 см^3.

1942—1958. *Работы по сжатию магнитного потока в США*. Принцип сжатия магнитного потока был использован в годы войны в *Лос-Аламосской лаборатории* для измерений кумулятивных характеристик устройств, в которых использовался ускоряемый взрывом «лайнер», как свидетельствует неопубликованный отчет, написанный Дж. Фаулером (1944). Приблизительно десятью годами позже в той же самой лаборатории В. Гарн, частично по совету Э. Теллера и Ф. Уиллинга, осуществляет ряд опытов по сжатию магнитного потока; целью опытов являлось создание сильных магнитных полей [9.2]. В 1957 г. К. Фаулер продолжает эту работу и начинает осуществлять интенсивную программу исследований, которая оставалась еще не законченной в 1969 г.

Приблизительно в это же время в *Лаборатории излучений им. Лоуренса* (Ливермор) Дж. Ширер и Р. Киддер под руководством Дж. Фостера продолжают работу, начатую ранее К. Макдональдом и Дж. Уилсоном, и приступают к выполнению большой программы работ по взрывным генераторам тока. Большая часть работ завершается в 1963 г.; вся программа заканчивается через десять лет после ее начала (1967) [8.7].

1951—1952. *Работы по сжатию магнитного потока в СССР.* В 1951 г. А. Д. Сахаров предлагает использовать взрывные устройства для сжатия магнитного потока; годом позже Р. З. Людаев и др. выполняют первые взрывные эксперименты с целью получения сверхсильных магнитных полей [8.5, 8.6]. В течение последующих десяти лет обширные экспериментальные работы по этой же тематике выполняются в *ИАЭ им. Курчатова.* В 1952 г. Я. П. Терлецкий предлагает использовать поля, получаемые взрывным сжатием, для ускорения элементарных частиц; это предложение появляется в печати в 1957 г. [1.210] и представляет собой первую публикацию в открытой литературе по сжатию магнитного потока.

1949—1954. Различные авторы (Г. Ролт [1.212], Дж. Олсен [1.216], В. Майерс [1.214], А. Инке [1.215] и особенно К. Чемпион [1.217]) предлагают способ генерации сильных магнитных полей путем использования конденсаторной батареи в качестве источника энергии.

1956—1957. *С. Фонер и Х. Колм* публикуют результаты исследований очень сильных магнитных полей, создаваемых разрядом конденсаторной батареи через спиральные катушки [7.1, 7.2]. Позже следует сообщение *Х. Ферса, М. Левина, Р. Ванека*, которые создали поле, превышающее 1 МЭ, используя одновитковый соленоид [7.16]; их статьи до сих пор остаются основным пособием при работе с сильными магнитными полями.

1960. *К. Фаулер, В. Гарн и Р. Кайрд* публикуют первую пространную статью в открытой печати по мегаэрстедным полям, генерируемым при помощи взрыва [9.2].

1960—1962. *Работы по сжатию магнитного потока в Западной Европе.* Г. Кнопфель и И. Линхарт предлагают использовать сверхсильные магнитные поля, создадаваемые взрывом, в физике плазмы, и в *Лаборатории ионизованных газов* в 1960 г. начинает выполняться соответствующая экспериментальная программа [1.154]. Впоследствии в этой работе сотрудничают Ф. Герлах и Дж. Сомон (1961), а позднее Г. Ленер и Р. Луппи, который присоединился к группе, работающей во Фраскати [9.20, 1.27]. Примерно в то же время французская группа *Комиссариата по атомной энергии* (*Лимейл*) (А. Брин, Ж. Безансон, Ж. Ведель и др.) начинает работать по программе мегаэрстедных полей, генерируемых взрывом [1.29]. Вероятно, в это же время ряд английских ученых (включая А. Брайанта и А. Уоллеса) *Научно-исследовательского центра по разработке атомного оружия* (*AWRE*) в Олдеместоне и Фулнессе также занимаются экспериментальными и теоретическими исследованиями магнитокумулятивных генераторов, но точная информация для этого периода отсутствует.

1961. Конференция «*Сильные магнитные поля*», *Бостон* [1.1], представляет собой первую большую международную встречу ученых, рассмотревших почти все стороны проблемы сильных магнитных полей. Этой конференции предшествовали две подобные же, но менее крупные конференции (*Гатлинбург*, 1958, *Принстон*, 1959), которые были посвящены главным образом магнитным полям, используемым в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу.

1964. В *Национальной магнитной лаборатории в Бостоне* получают постоянное поле величиной 250 кЭ с помощью магнита, предложенного Ф. Биттером и созданного Д. Монтгомери. Магнит, который содержит три концентрические катушки, потребляет мощность 10 МВт и для его охлаждения требуется расход воды примерно 10 000 л/мин.

1965. *Конференция по генерации мегаэрстедных магнитных полей с помощью взрыва и связанным с нею экспериментом, Фраскати* [1.27]. На ней представлены обширные материалы работ, выполненных во многих лабораториях, особенно исследовательскими группами Лос-Анджелеса, Лимейла, Фраскати и Лаборатории воздушно-реактивных двигателей. Доклады 19 авторов (А. Д. Сахарова и сотр.) из *ИАЭ им. Курчатова* в Москве по сильным магнитным полям и генераторам тока, официально заявленные на конференцию, в последний момент были сняты и опубликованы в другом месте [8.5, 8.6].

1966. Конференция *«Интенсивные магнитные поля»*, *Гренобль* [1.55], является продолжением бостонской конференции.

1966. *Э. Кнейр* и сотр. (фирма «Сандиа», Альбукерке [9.4, 9.22]), *С. Г. Алиханов* и сотр. (Новосибирск, [9.16, 9.18]), *А. М. Столов* и сотр. (Ленинград [9.17]) описывают опыты по сжатию магнитного потока, осуществляемому взрывом металлических фольг электрическим током для создания мегаэрстедных полей. Подобный же принцип, но на более низких энергиях, был использован ранее И. Линхартом и Г. Шенком [9.21].

1967. *Летняя школа по физике твердого тела в интенсивных магнитных полях*, *Чания*, Крит [1.74].

1968—1969. *Ливерморская* группа публикует детальное описание взрывных генераторов энергии мегаджоульного уровня [8.7]; позднее следуют подобные публикации групп в *Альбукерке* [8.14] и *Фраскати* [8.15].

1969. *Летняя школа по физическим процессам при высоких плотностях энергии*, *Варенна*. Явления, вызванные действием сверхвысоких магнитных полей, анализируются и сравниваются с более общими физическими эффектами [1.76].

§ 3. ЛАБОРАТОРИИ, ЗАНИМАЮЩИЕСЯ ИССЛЕДОВАНИЯМИ В ОБЛАСТИ СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Лаборатории, обладающие источниками постоянной мощности

1.16. Ограничиваясь установками, способными создавать поля величиной по крайней мере 100 кЭ в объеме нескольких кубических сантиметров, начнем перечисление с тех лабораторий, оборудование которых позволяет создавать постоянные поля в таком объеме. Согласно сказанному в п. 1.9, получение таких полей требует установок мощностью порядка мегаватт. К лабораториям, обладающим такими установками, относятся следующие (более подробно см. [1.77]):

Национальная магнитная лаборатория, МТИ, Бостон, США; Научно-исследовательская лаборатория ВМФ США, Вашингтон, США; Научно-исследовательский центр имени Льюиса, Кливленд, США; фирма «Белл телефон», Муррей-Хилл, шт. Нью-

Джерси, США; Калифорнийский университет, Беркли, США; Научно-исследовательский институт стали, Сендай, Япония; Кларендонская лаборатория, Оксфорд, Великобритания; Кавендишская лаборатория, Кембридж, Великобритания; Научно-исследовательский институт радиолокации, Малверн, Великобритания; Лаборатория электростатики и физики металлов, Гренобль, Франция; Лаборатория Камерлинг-Оннеса, Лейден, Нидерланды; Польская Академия наук, Вроцлав, Польша; Физический институт АН СССР им. Лебедева, Москва, СССР.

Оборудование большой мощности имеют и некоторые другие лаборатории, но они специально не используют его для получения очень высоких магнитных полей (например, можно упомянуть центры плазменных исследований в Принстоне, Ливерморе, ИАЭ им. Курчатова в Москве и др.).

1.17. Список лабораторий, занимающихся импульсными полями большой интенсивности, составить более трудно, так как требуемые для создания полей в диапазоне 0,1—1 МЭ источники энергии (например, батареи конденсаторов) являются относительно новыми источниками (см. п. 1.11). Отсылаем читателя к табл. 7.II, где приведен перечень некоторых установок, на которых получены мегаэрстедные поля, и к табл. 6.II, содержащей перечень лабораторий, имеющих батареи «быстрых» конденсаторов энергоемкостью более 1 МДж. Стоимость таких установок указана на фиг. 6.1, откуда видно, что они требуют на 1 кДж запасенной энергии около 300 долл. капиталовложений, не включая стоимости строения.

Лаборатории, обладающие взрывными установками

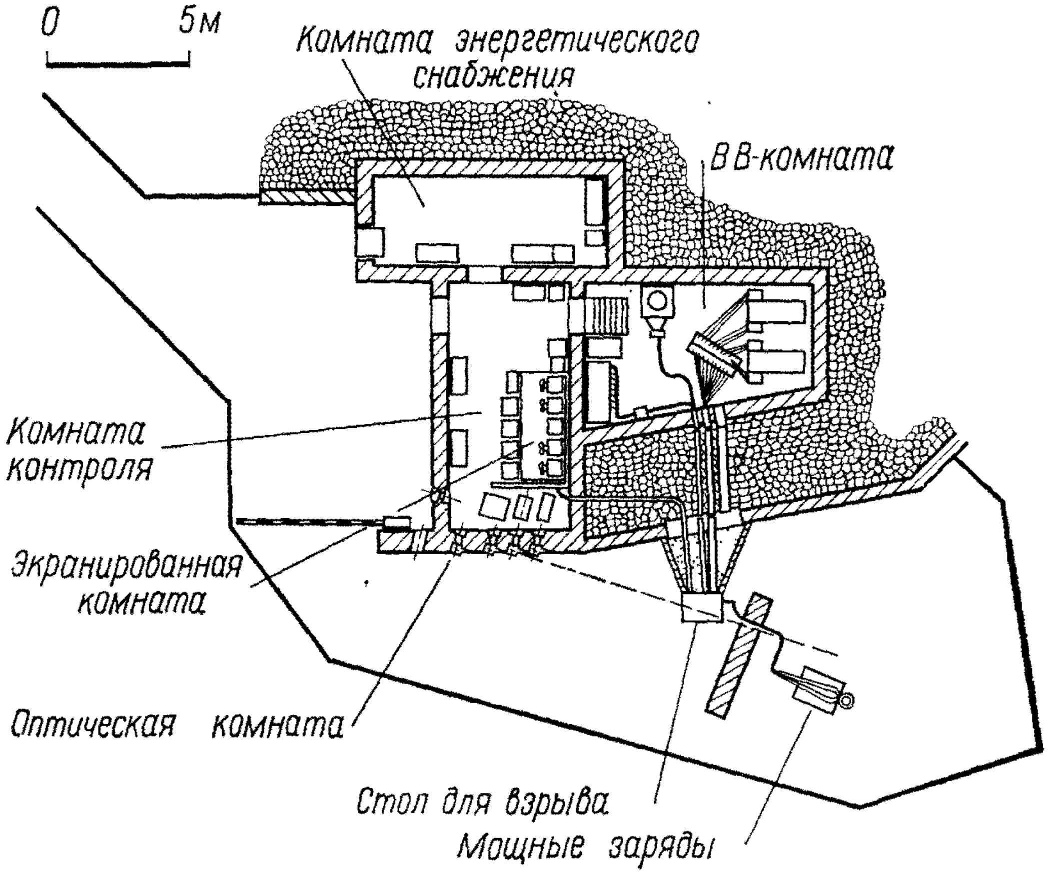
1.18. Если учитывать только членов «взрывного клуба», т. е. лаборатории, обладающие (на 1969 г.) собственными взрывными установками, то перечень становится более кратким. Приведенный ниже список ограничивается лабораториями, работы которых по сильным магнитным полям хорошо известны; конечно, существует много других взрывных установок, которые могли бы быть легко приспособлены к требованиям экспериментов по сверхсильным магнитным полям.

Лос-Аламосская научная лаборатория, Лос-Аламос, США;
Лаборатория излучений им. Лоуренса, Ливермор, США;
Лаборатория фирмы «Сандиа», Альбукерке, США;
Физический факультет Иллинойсского технологического института, Чикаго, США;
ИАЭ им. Курчатова, Москва, СССР;
Институт гидродинамики СОАН СССР, Институт ядерной физики СОАН СССР, Академгородок, Новосибирск, СССР;

Научно-исследовательский центр в Лимейле (Комиссариат по атомной энергии), Вилленёв Сент-Джорж, Франция; Лаборатория ионизованных газов, Фраскати, Италия.

Взрывная установка в Коллеферро

1.19. Может быть поучительным рассмотреть в качестве примера взрывную установку исследовательской группы во Фраскати [1.256], расположенном вблизи Коллеферро (Рим). Она включает



Фиг. 1.6. План размещения взрывной установки в Коллеферро.

Высота потолка в бункере составляет 2,50 м, за исключением ВВ-комнаты, где высота потолка равна 3,70 м.

в себя бункер общей площадью крытой поверхности около 100 м^2 и основной комплект оборудования, которое распределено по трем комнатам и участку для взрыва следующим образом [фиг. 1.6]:

ВВ-комната (высоковольтная) содержит систему сжатого воздуха и три полностью самостоятельные конденсаторные батареи со следующими параметрами: 200 кДж, 15 кВ (фиг. 6.5); 60 кДж, 9 кВ — батарея с одним искровым разрядником; 12 кДж, 40 кВ — батарея с одним искровым разрядником.

Комната энергоснабжения содержит коммутатор электросистемы мощностью 60 кВт, из которых 20 кВт стабилизированы по напряжению с точностью $\pm 1\%$; дополнительно может быть включен мобильный аварийный генератор с приводом от двигателя мощностью 20 кВт.

Оптическая комната содержит комбинированную камеру для покадровой и непрерывной съемки, камеру в режиме непрерывной

Фиг. 1.7. Установка комплексного плазменного эксперимента [1.153], смонтированная на месте, где размещаются «мощные заряды».

Большой магнитокумулятивный генератор позволяет получать очень высокие поля (0,5 МЭ в объеме 1000 см^3). В этом эксперименте используются все виды контрольно-измерительной аппаратуры, описанные в тексте. Следует добавить, что для измерения нейтронного потока от горячей дейтериевой плазмы применяются различные детекторы нейтронов (один из них находится внутри цилиндрического контейнера, расположенного на заднем плане).

съемки с преобразователем изображения, камеру с двойной ячейкой Керра, спектрограф с решеткой.

Комната контроля содержит *экранированную комнату* (оборудованную десятью двухлучевыми осциллографами и цифровой системой времени [1.254]) и *основное командное* и *контрольное* *электронное оборудование*; предусмотрены внутренняя блокировка и контроль с помощью предохранительного блока.

Участок взрыва размещается на открытом месте и находится на одном уровне с полом бункера. Под массивным взрывным столом открыто размещаются зажимы кабелей, идущих от конденсаторных батарей, и зажимы 30 коаксиальных кабелей. служащих для измерительных целей и для коммутации (фиг. 1.1), а также пять систем подрыва детонаторов, каждая из которых может работать независимо. На этом столе могут производиться опыты с небольшими зарядами (до 8 кг взрывчатого вещества). Более мощные заряды (до 100 кг и более) подрываются за стеной, которая защищает стол и находящиеся там коммуникации (фиг. 1.7). За экспериментом можно наблюдать из оптической комнаты через ряд люков — отверстий, каждое из которых имеет зеркало, смонтированное на поворотном столе с дистанционным управлением.

1.20. В добавление к перечисленному выше (и показанному на фиг. 1.6) оборудованию установка также включает: трансформаторную подстанцию, помещение для приготовления и сборки зарядов взрывчатого вещества, помещение для хранения детонаторов и резервуар с водой емкостью 10 м^3.

Стоимость установки, включая электросиловую сеть, доходила в 1965 г. до 80 000 долл. (без учета стоимости земельного участка и оборудования), дополнительно было затрачено 40 000 долл. на прокладку подъездной дороги и ведение работ по строительству фундамента. Полная стоимость стандартного оборудования может быть оценена в 500 000 долл., из которых треть приходится на батареи конденсаторов.

1.21. В описанной выше установке оборудование находится в защитном ударопрочном бункере, а взрывчатое вещество подрывается на открытом месте. Это лишь один из возможных способов размещения деталей установки. Используется и другой вариант, когда взрывчатое вещество помещается в контейнер, а оборудование находится в обычном помещении, как, например, в Лаборатории воздушно-реактивных двигателей в Сен-Ремоне, США, или в институте ядерной физики СОАН СССР в Новосибирске. Такое размещение имеет то преимущество, что позволяет работать вблизи обычной лаборатории или даже внутри ее и устраняет зависимость от погодных условий, имеющую место в случае «открытого» варианта. Его недостатком является ограничение длины используемого взрывчатого вещества, налагаемое размерами взрывной камеры; к тому же работа внутри такого контейнера не совсем приятна.

Сооружение подходящего для взрывных экспериментов контейнера на несколько килограммов бризантного взрывчатого вещества не представляет особой трудности. В самом деле, экспериментально показано [5.5], что безопасный контейнер, сделанный из стали хорошего качества, должен обладать массой, по крайней мере в 1000 раз превышающей массу бризантного взрывчатого вещества (состав B). Для сферической оболочки, имеющей средний радиус a, толщину стенки d и изготовленной из обычной стали с пределом текучести, лежащим в диапазоне 30—50 кг·мм$^{-2}$ (см. табл. 5.I), критерий сохранения упругости приближенно выражается в виде

$$a^2 d > 0{,}01 M_E \text{ (м, кг)},$$

где M_E — масса бризантного взрывчатого вещества в кг. Следует добавить, что для уменьшения шума до приемлемого уровня необходимо снаружи покрывать контейнер различными материалами, поглощающими звуковую волну.

Вторая глава Квазистационарные магнитные поля

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Дифференциальные уравнения

2.1. В этой главе мы рассмотрим различные теоретические аспекты связи между магнитными полями и токами. Обсуждение начнем с основных соотношений и понятий, существующих в этой области (см., например, [2.1—2.4]), и прежде всего с уравнений Максвелла, которые в рационализированной системе МКС [1]) обычно имеют вид:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — *напряженность магнитного поля*; $\mathbf{B}$ — *магнитная индукция*; $\mathbf{D}$ — *электрическое смещение*; $\mathbf{E}$ — *напряженность электрического поля*; ρ_e — *плотность свободных электрических зарядов* и $\mathbf{j}$ — *плотность тока проводимости*. Для изотропной среды справедливы соотношения

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{2.6}$$

где

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_R$$

---

[1]) Уравнения, обозначенные звездочкой, написаны в практической системе электрических единиц.

есть магнитная проницаемость; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м,
и

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_R$$

есть диэлектрическая проницаемость; $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$ Ф/м. Обе относительные проницаемости μ_R и ε_R могут быть сложными функциями пространства, времени, поля и т. п., но мы будем считать их материальными константами и почти всегда полагать $\mu_R = \varepsilon_R = 1$. Дополнительное уравнение дается *законом Ома*

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{2.7}$$

где *электропроводность* σ является материальной константой; как будет детально показано в гл. 10, электропроводность может быть сложной функцией, зависящей от температуры и магнитного поля.

Приближение квазистационарного поля

2.2. Во всех последующих главах мы будем иметь дело с *квазистационарными магнитными полями*, т. е. такими полями, для которых можно пренебречь током смещения $\partial \mathbf{D}/\partial t$ и уравнение (2.1) записать в простом виде:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \tag{2.8}$$

или, в практической системе электрических единиц (Э, А, см),

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0{,}4\, \pi \mathbf{j}. \tag*{(2.9)*}$$

Из этого уравнения следует, что для *пустоты* (где $j \equiv 0$) поле меняется одновременно во всей области. Поэтому приближение квазистационарного поля справедливо, если

$$\lambda \gg l,$$

где λ — характеристическая длина какого-либо изменения поля (длина волны) и l — размер рассматриваемой области (например, магнитной катушки, электрической цепи и пр.).

В *проводящей среде* условия применимости этого приближения бывают различными. Действительно, если (для простоты) задать поле в виде синусоидальной функции времени

$$H = H_0 \sin \omega t, \tag{2.10}$$

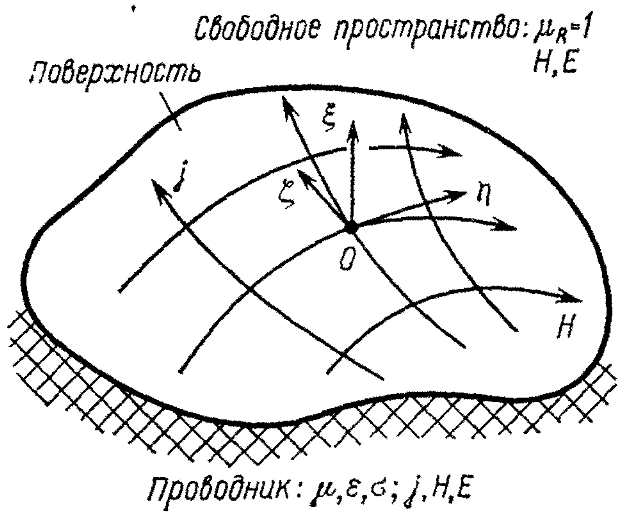
то легко убедиться [взяв ротор от уравнения (2.1) и используя уравнение (2.2), см. также уравнение (3.3)], что членом, обусловленным током смещения, можно пренебречь по сравнению с членом, обусловленным током проводимости, когда

$$\frac{1}{\omega} \gg \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

Используя значения проводимости (статические) для обычных металлов, приведенные в табл. 10.IV, и полагая $\varepsilon_R = 1$, для правой части неравенства получим величины порядка 10^{-19} с. Однако на высоких частотах статические значения проводимости справедливы лишь при условии, что $1/\omega$ больше времени релаксации электронов τ (т. е. времени, соответствующего средней длине свободного пробега электрона, см. п. 10.39); при этом ток будет синфазен с электрическим полем. Для хороших проводников τ составляет величину порядка 10^{-14} с (табл. 10.II), поэтому можно сделать вывод, что приближение квазистационарного поля имеет силу по крайней мере для всех интересующих нас частот вплоть до инфракрасного диапазона.

Граничные условия

2.3. Интересующие нас задачи обычно относятся к пустоте (вакуум, $\mu = \mu_0$), в которой находится система проводников (фиг. 2.1). Для каждой из этих двух областей (проводник и вакуум) составляются уравнения электромагнитного поля; затем они



Фиг. 2.1. Граница проводника.

Система координат ξ, η, ζ в точке O выбрана таким образом, чтобы ζ была касательной к j и ξ была нормалью к поверхности.

«сшиваются» при помощи *граничных условий*, которые требуют, чтобы векторные компоненты

$$H_t, \ B_n, \ E_t \text{ и } D_n$$

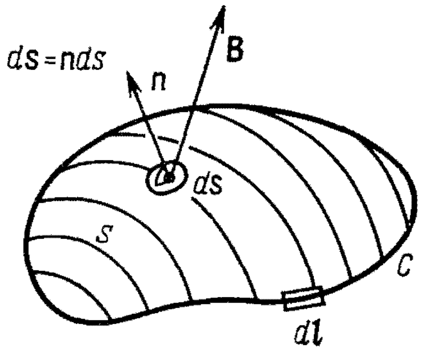
оставались неизмененными при переходе через границу между областями (индексы t, n обозначают соответственно тангенциальную и нормальную составляющие).

Интегральные уравнения

2.4. Иногда удобно использовать интегральную форму уравнений (2.2) и (2.8). Преобразуя уравнение (2.8) с помощью *теоремы Стокса*

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \tag{2.11}$$

для незамкнутой поверхности S, опирающейся на замкнутую



Фиг. 2.2. Поверхность S, ограниченная контурной линией C.

кривую C (фиг. 2.2), получим интегральное выражение *закона Ампера*

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_S, \tag{2.12}$$

или, в практической системе электрических единиц (Э, А, см),

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0{,}4\ \pi I_S, \tag{2.13*}$$

где $I_S = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$ есть полный ток, текущий через поверхность S. Из уравнения (2.2) точно таким же путем можно вывести *закон Фарадея*

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \tag{2.14}$$

который в практической системе электрических единиц (В·см$^{-1}$, Гс, см) записывается в виде

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -10^{-8} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2.15*}$$

2.5. В среде, движущейся со скоростью $\mathbf{u}$, для наблюдателя, движущегося вместе со средой, электрическое поле будет равно

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \tag{2.16}$$

Подставляя это значение в уравнение (2.2) и интегрируя, как ранее, получаем (подробно см. п. 4.2 [1]))

$$\oint_C \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} - \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l}, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{E}^*$ — электрическое поле, действующее на отрезке $d\mathbf{l}$ и измеренное в движущейся системе отсчета, в которой отрезок $d\mathbf{l}$ является неподвижным; это именно то электрическое поле, которое вызвало бы протекание тока в системе проводников, совмещенных с контуром C. Первый член в правой части уравнения (2.17) представляет собой изменение потока через поверхность S, обусловленное изменением во времени магнитной индукции, в то время как второй член описывает увеличение потока вследствие движения контура C.

§ 2. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Введение к задаче нахождения потенциала

2.6. Определение зависимости между магнитными полями и распределением соответствующих им токов является трудной математической задачей. Часто бывает необходимо упростить задачу введением разумных допущений или предположений. Альтернативой аналитическому методу решения являются аналоговые или цифровые численные методы, которые мы кратко обсудим позднее.

Ограничимся рассмотрением свободного пространства. Если в интересующей нас области плотность тока j везде равна нулю, то из уравнения (2.8) следует, что вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ может быть выражен через градиент скалярного потенциала [см. уравнение (П.2.1)]:

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi, \tag{2.18}$$

и, поскольку $\mu\nabla \cdot \mathbf{H} \equiv 0$, задача сводится к нахождению потенциала, описываемому *уравнением Лапласа*

$$\Delta\Phi = 0. \tag{2.19}$$

На поверхности идеального проводника ($\sigma \to \infty$) магнитное поле является чисто тангенциальным, т. е. (в системе координат, обо-

---

[1]) Выводы этого пункта обосновываются в приложении П4; система обозначений, применяемая в приложении, такая же, как в основном тексте, с прибавлением буквы П (например, уравнение (П2.5), фиг. П1.11, табл. П3.1).

значенной на фиг. 2.1)

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}=0. \tag{2.20}$$

Вообще граничное условие задается фиксированием поля или фиксированием потенциала на поверхности проводника; тогда задача сводится к *задаче Дирихле*.

2.7. Решение задачи о нахождении потенциала, определяемого уравнениями (2.19), (2.20), для ограничивающих поверхностей различной геометрии хорошо известно из математической физики. Например, при решении двумерной задачи можно использовать метод, основанный на *конформном преобразовании с использованием функций комплексного переменного*. Действительно, во многих случаях задачу нахождения потенциала можно преобразовать из реальной плоскости (x, y) в такую плоскость, где решение возможно; конечное решение получается обратной трансформацией в первоначальную плоскость (x, y).

В дальнейшем мы рассмотрим, не вдаваясь в детали, несколько примеров, имеющих важное значение при высоких интенсивностях магнитных полей. Более подробное обсуждение приведено в работах [2.2, 2.5, 2.6 или 2.7].

2.8. Для реальных проводников, обладающих конечной электропроводностью σ, условия на поверхности отличаются от случая идеальной электропроводности, поскольку ток и магнитное поле проникают в них (более подробно см. в гл. 3 и 4). Следствием проникновения поля является, например, возможность существования нормальной компоненты поля H_ξ.

Проводник в однородном поле

2.9. Для идеально проводящего шара радиусом a, помещенного в однородное магнитное поле $\mathbf{H}_\infty$, уравнение Лапласа (2.19) в сферических координатах (r, φ, ϑ) имеет вид (см. табл. П.2.I)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)=0. \tag{2.21}$$

Эта задача симметрична относительно оси $\vartheta=0$ $(\partial\Phi/\partial\varphi\equiv 0)$ и поэтому является одной из наиболее простых трехмерных задач о нахождении потенциала. Для нашего случая решение может быть найдено путем разделения переменных и, как можно проверить подстановкой в уравнение (2.21), оно имеет вид

$$\Phi=H_\infty r\left(1+\frac{Ca^3}{r^3}\right)\cos\vartheta, \tag{2.22}$$

где константа C определяется граничным условием на поверхности шара. Первый член представляет собой *потенциал однородного поля*, второй описывает искажение потенциала, вызванное шаром, и соответствует *потенциалу диполя*, параллельного оси z и обладающего *моментом*

$$\mathbf{m}_d = -a^3\mathbf{H}_\infty C. \tag{2.23}$$

2.10. В случае идеально *диамагнитного шара* из уравнения (2.20) $[(\partial\Phi/\partial r)_{r=a} \equiv 0]$ получаем

$$C = \frac{1}{2}, \tag{2.24}$$

и компоненты магнитного поля, согласно (2.18), равны

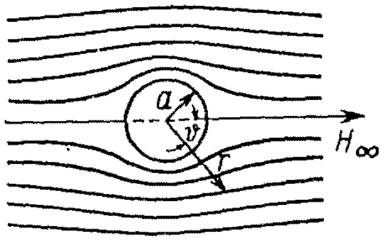
$$H_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -H_\infty\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\cos\vartheta, \tag{2.25}$$

$$H_\vartheta = -\frac{\partial\Phi}{r\,\partial r} = H_\infty\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)\sin\vartheta, \tag{2.26}$$

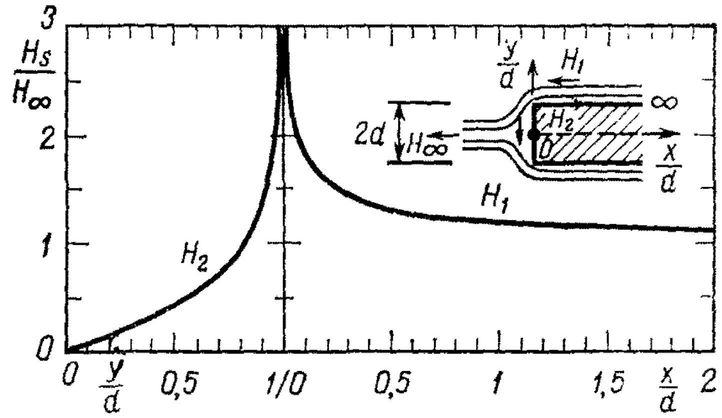
$$H_\varphi = 0. \tag{2.27}$$

На экваториальной окружности ($r = a$, $\vartheta = \pi/2$) магнитное поле возрастает в $^3/_2$ раза независимо от величины a; следовательно, можно говорить о том, что шар действует как *«концентратор потока»* (фиг. 2.3).

2.11. В более общем случае конечной проводимости распределение тока в шаре изменяет значение потенциала (2.22). Математически этот потенциал можно определить, находя распределение



Фиг. 2.3. Качественная схема распределения поля вокруг диамагнитного шара радиусом a.



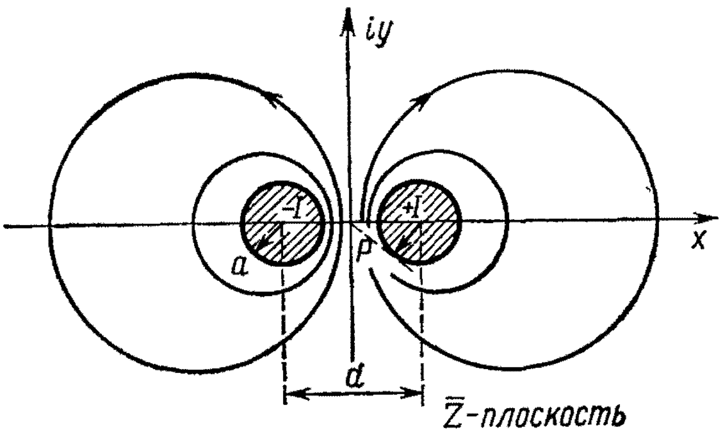
Фиг. 2.4. Относительная величина поля на поверхности бесконечно длинного, прямоугольного, идеально диамагнитного проводника, помещенного в однородное магнитное поле.

тока внутри шара; постоянная интегрирования определяется из соответствующих граничных условий (п. 2.3). Эта задача была решена в [3.7] для простого случая синусоидального поля [см. (2.10)].

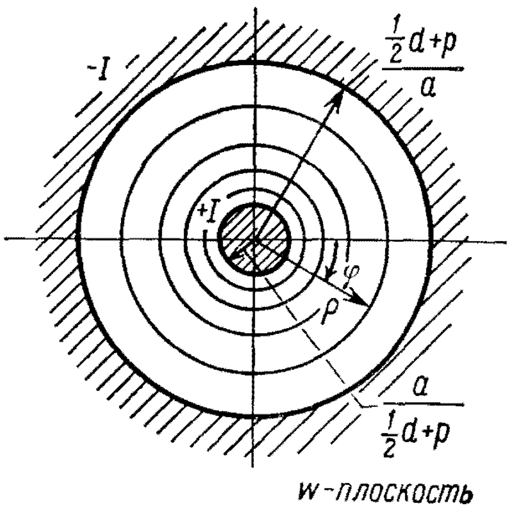
2.12. Задачей, аналогичной решенной ранее, является задача об идеально диамагнитном, бесконечно длинном, *прямоугольном проводнике*, помещенном в однородное поле (фиг. 2.4). Наличие двумерной (плоскостной) симметрии позволяет использовать здесь *метод конформного преобразования* [3.7]. Отметим, что на вершине прямого угла поле H_s равно бесконечности. На практике, однако, поле H_s конечно вследствие конечной глубины проникновения поля в проводник.

Проводник с заданным током

2.13. Определим величину магнитного поля вокруг проводника постоянного сечения, по которому протекает полный аксиальный ток I. В частном случае цилиндрического проводника



Ф и г. 2.5. Двухпроводная передающая линия.



Ф и г. 2.6. Конформное преобразование задачи, изображенной на фиг. 2.5.

решение непосредственно следует из закона Ампера (2.12). Действительно, если проинтегрировать уравнение (2.12) по концентрической окружности радиусом r, то найдем

$$H_\vartheta = \frac{1}{2\pi}\frac{I}{r}, \tag{2.28}$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$H_\vartheta = 0{,}2\,\frac{I}{r}. \tag*{(2.29)*}$$

Выражение для потенциала этой осесимметричной задачи следует из уравнения (2.18) и п. П2.4:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} I\vartheta. \tag{2.30}$$

2.14. Более сложным примером является *двухпроводная передающая линия*, изображенная на фиг. 2.5: по двум одинаковым проводам с радиусом a и расстоянием d между осями протекают противоположно направленные токи $\pm I$. Вследствие взаимодействия между полем и током (*эффект близости*) значение магнитного поля нельзя получить простым сложением векторов невозмущенного поля от каждого провода в отдельности. Этот пример является типичной двумерной задачей нахождения потенциала, которая может быть относительно легко решена при использовании конформного преобразования (п. 2.7).

2.15. Плоскость (x, y) на фиг. 2.5 может быть преобразована в плоскость (ρ, φ) на фиг. 2.6; в этой плоскости изображению свойственна бóльшая симметрия. Поэтому задача решается проще. Найденный вектор поля вне проводников имеет составляющие [3.7]

$$H_x = -\frac{1}{\pi} pI \frac{2xy}{[(x^2-y^2-p^2)^2+4x^2y^2]}, \tag{2.31}$$

$$H_y = -\frac{1}{\pi} pI \frac{x^2-y^2-p^2}{[(x^2-y^2-p^2)^2+4x^2y^2]}, \tag{2.32}$$

где

$$p^2 = \frac{1}{4} d^2 - a^2. \tag{2.33}$$

Величина поля равна

$$|H| = \sqrt{H_x^2+H_y^2} = \frac{pI}{\pi [(x^2-y^2-p^2)^2+4x^2y^2]^{1/2}}. \tag{2.34}$$

2.16. На поверхности проводника, которая описывается уравнением

$$\left(x \pm \frac{1}{2} d\right)^2 = a^2 - y^2, \tag{2.35}$$

поле равно

$$|H_s| = \frac{1}{2\pi} \frac{pI}{xa}. \tag{2.36}$$

Магнитное поле между двумя проводниками перпендикулярно оси x, и его величина, как следует из уравнения (2.32) для $y \equiv 0$, равна

$$H_y = \frac{1}{\pi} I \frac{p}{p^2-x^2}, \tag{2.37}$$

в то время как из уравнения (2.28) без учета эффекта близости получается меньшее значение:

$$H_y = \frac{1}{2\pi} I \left(\frac{1}{{}^1/_2 d - x} + \frac{1}{{}^1/_2 d + x}\right) = \frac{1}{\pi} I \frac{{}^1/_2 d}{{}^1/_4 d^2 - x^2}. \tag{2.38}$$

Это увеличение магнитного поля между проводниками связано с соответствующим увеличением плотности тока на внутренней стороне проводников. В результате возрастает кажущееся сопротивление передающей линии (что может быть установлено с помощью выражений, приведенных в п. 4.12) и меняется ее индуктивность (как будет показано в п. 2.32).

§ 3. ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Основные уравнения

2.17. Чтобы решить уравнение (2.8) для пространства, внутри которого плотность тока отлична от нуля, удобно использовать *вектор-потенциал* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.39}$$

в согласии с уравнением (2.3), которое требует, чтобы индукция $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ являлась ротором некоторого векторного поля [см. уравнение (П2.13)].

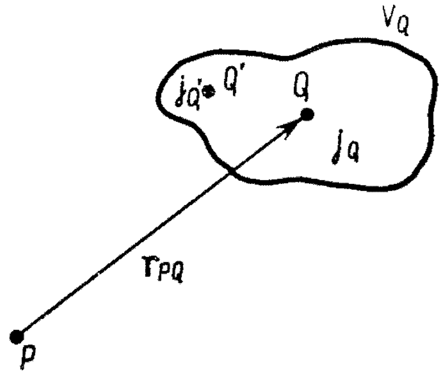
Фиксируя $\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv 0$ и учитывая, что

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \tag{2.40}$$

сводим задачу к нахождению решения *уравнения Пуассона*

$$\Delta \mathbf{A} = -\mathbf{j}. \tag{2.41}$$

2.18. Как известно из математической физики и особенно из задач по электростатике, решение этого уравнения для



Фиг. 2.7. Пространственное распределение тока.

неограниченного пространства дается выражением

$$\mathbf{A}_P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q}{r_{PQ}}\, dV_Q, \tag{2.42}$$

из которого получаем

$$\mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q \times \mathbf{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3}\, dV_Q. \tag{2.43}$$

Здесь P—точка пространства, в которой мы хотим определить магнитное поле, Q — переменная точка интегрирования, находящаяся внутри проводника (фиг. 2.7). Переход от уравнения

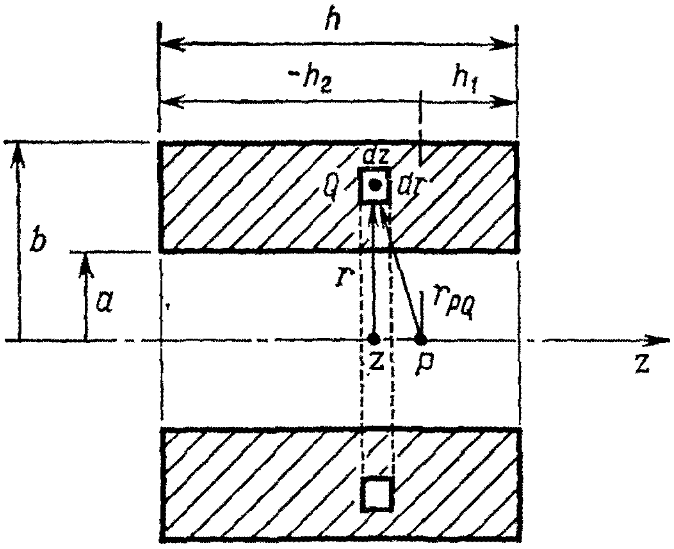
(2.42) к (2.43) получаем, используя векторное соотношение

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}_Q}{r_{PQ}}\right) = \frac{1}{r_{PQ}} \nabla \times \mathbf{j}_Q + \left(\nabla \frac{1}{r_{PQ}}\right) \times \mathbf{j}_Q$$

и замечая, что $\nabla \times \mathbf{j}_Q \equiv 0$, так как оператор ∇ относится только к точке P. Из уравнения (2.42) легко находим, что условие $\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv 0$ требует $\nabla_Q \cdot \mathbf{j}_Q \equiv 0$; поэтому уравнение (2.43) строго справедливо только для замкнутых или бесконечно длинных проводников.

Цилиндрический соленоид

2.19. Рассмотрим толстый *цилиндрический соленоид* (фиг. 2.8), в котором азимутальный ток характеризуется средней постоянной плотностью тока fj; здесь j — плотность тока каждого из N



Фиг. 2.8. «Толстый» соленоид

проводников, составляющих обмотку, и имеющего площадь поперечного сечения Σ; f — *коэффициент заполнения*, определяемый следующим образом:

$$f = \frac{\text{объем проводника}}{\text{объем катушки}} = \frac{N\Sigma}{h(b-a)}. \tag{2.44}$$

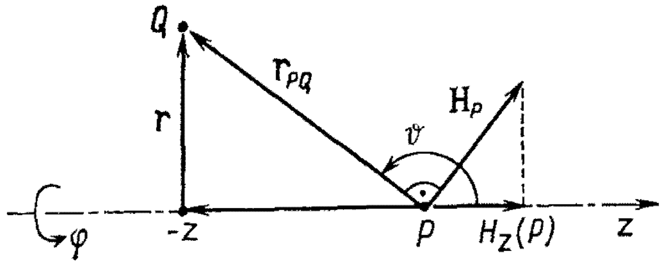
Для аксиальной составляющей в точке P из уравнения (2.43) получим (фиг. 2.9)

$$H_z(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{fj}{r_{PQ}^2} \sin\vartheta r \, d\varphi \, dr \, dz. \tag{2.45}$$

Интегрируя по φ и вводя $\sin\vartheta = r/r_{PQ}$, $r_{PQ} = \sqrt{r^2 + z^2}$ (где P теперь принимается за начало системы координат), находим окончательное выражение для поля

$$H_z(P)=\frac{1}{2}\int\int fj\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,dr\,dz, \qquad (2.46)$$

которое может быть применено к различным цилиндрическим катушкам (см. сводку результатов в п. П1).



Фиг. 2.9. Осесимметричная задача (к фиг. 2.8).

2.20. В том случае, если j и f постоянны по катушке, обладающей прямоугольным сечением, удобно ввести общий ток

$$I=j\Sigma \qquad (2.47)$$

и исключить f, так что после первого интегрирования уравнения (2.46) получим

$$H_z(P)=\frac{NI}{2h(b-a)}\int\limits_a^b\left(\frac{h_1}{\sqrt{r^2+h_1^2}}+\frac{h_2}{\sqrt{r^2+h_2^2}}\right)dr.$$

Вводя параметр поля

$$H_f=\frac{NI}{h}, \qquad (2.48)$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$H_f=0{,}4\pi\frac{NI}{h}, \qquad (2.48)^*$$

и производя второе интегрирование, получаем выражение в безразмерной форме

$$H_z(P)=\frac{1}{2}H_f\left[\frac{h_1}{b-a}\ln\frac{b+\sqrt{b^2+h_1^2}}{a+\sqrt{a^2+h_1^2}}+\frac{h_2}{b-a}\ln\frac{b+\sqrt{b^2+h_2^2}}{a+\sqrt{a^2+h_2^2}}\right]. \qquad (2.49)$$

Оптимизация катушек

2.21. В случаях специфического использования магнитных полей часто интересуются конструкцией катушки, оптимальной с точки зрения ряда особых требований, таких, как, например, требование максимальной величины магнитного поля, наибольшей однородности поля, наименьшего потребления мощности, наименьшего нагрева проводника и т. п. Рабочие характеристики магнита зависят, однако, не только от его конструкции, но в равной степени от источника питания и различных других звеньев электрической цепи, частью которой является магнит. Поэтому критерий оптимизации должен формулироваться для всей цепи или системы (как это будет сделано в гл. 6 и 7). Тем не менее может быть интересным коротко рассмотреть в отдельности работу катушки (без учета других звеньев электрической цепи).

2.22. Найдем мощность, рассеиваемую в цилиндрической катушке (фиг. 2.8). Полная мощность, рассеиваемая в катушке, может быть записана в виде

$$P = 2\pi \int\int f \frac{j^2}{\sigma_0} r\,dr\,dz, \tag{2.50}$$

так как fj^2/σ_0 — тепло, рассеиваемое локально в единицу времени, и σ_0 — электропроводность (см. табл. 10.IV). Комбинируя это выражение с уравнением (2.46), можно написать

$$H_z = G\sqrt{\frac{Pf\sigma_0}{a}}, \tag{2.51}$$

где

$$G = \sqrt{\frac{a}{8\pi}}\,\frac{\int\int j^* \{r^2/(r^2+z^2)^{3/2}\}\,dr\,dz}{\left[\int\int j^{*2} r\,dr\,dz\right]^{1/2}} \tag{2.52}$$

есть (безразмерный) *фактор Фабри*, зависящий только от геометрии катушки; плотность тока выражена здесь безразмерной величиной $j^* = j/j_0$. Для данной катушки эта функция обычно обладает максимумом $G_{\text{макс}}$, который соответствует определенным безразмерным соотношениям ее параметров (см. п. П1.12—14). Поэтому представляется возможным сравнивать катушки различной геометрии по их (энергетической) эффективности при создании заданного магнитного поля (что является наиболее важным критерием оптимизации многовитковых катушек).

Закон Био — Савара

2.23. На практике часто имеют дело с *линейными проводниками* (проводами), поперечные сечения которых малы по сравнению с другими размерами. Тогда выполняется (приближенно) соотношение

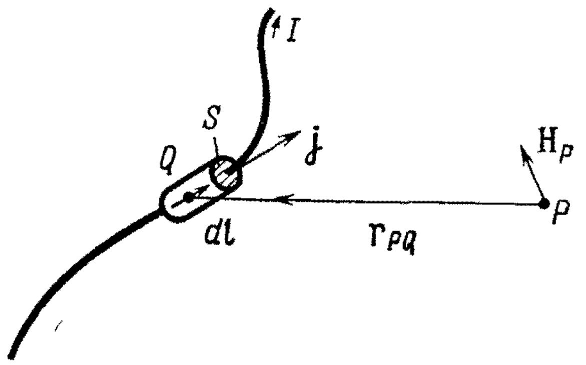
$$\mathbf{j}\cdot dV = \mathbf{j}\cdot S\cdot dl = j_n\cdot S\cdot d\mathbf{l} = I\cdot d\mathbf{l},$$

где $I = j_n S$ — полный ток, текущий в проводнике (перпендикулярно его поперечному сечению S, фиг. 2.10), и уравнение (2.43) преобразуется в выражение *закона Био — Савара*

$$\mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi} I \oint d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3}\,; \tag{2.53}$$

соответственно получаем выражение для вектора-потенциала

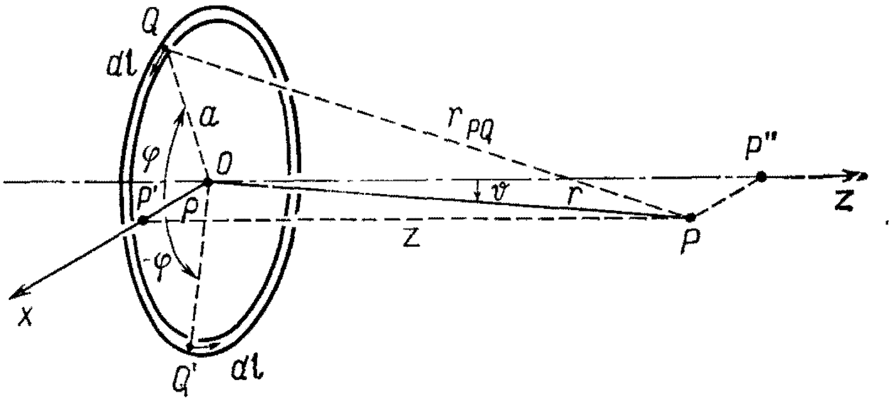
$$\mathbf{A}_P = \frac{1}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{l}}{r_{PQ}}. \tag{2.54}$$



Фиг. 2.10. Закон Био — Савара.

Кольцевой виток

2.24. Применим результаты, полученные в предыдущем пункте, к *кольцевому витку* (фиг. 2.11). В сферических координатах



Фиг. 2.11. Виток с током.

r, φ, ϑ вектор-потенциал имеет только азимутальную составляющую A_φ. Действительно, если с каждым элементом $d\mathbf{l}$ (определяемым углом φ) рассматривать симметричный ему элемент $d\mathbf{l}'$ с углом $-\varphi$, то можно заметить, что вектор-потенциал от этих элементов перпендикулярен плоскости OPP'; результирующий вектор-потенциал от всех элементов также перпендикулярен этой плоскости, так что вектор-потенциал $\mathbf{A}$ в точке P является касательной к окружности с центром в P и радиусом $P''P$. Рассматривая треугольник $PP'Q$, из уравнения (2.54) находим

$$A_\varphi = \frac{1}{4\pi} I \oint \frac{(dl)_\varphi}{r_{PQ}} = \frac{1}{2\pi} I \int_0^\pi \frac{a \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin\vartheta\cos\varphi}}. \quad (2.55)$$

Используя соответствующие преобразования, это выражение можно переписать в форме, содержащей полные эллиптические интегралы; эти интегралы появляются также и в окончательном решении для магнитного поля [2.2].

2.25. В том случае, когда можно пренебречь последним членом в выражении, стоящем под знаком квадратного корня, т. е. когда выполняется хотя бы одно из условий

$$r \gg a, \qquad \text{или } a \gg r, \qquad \text{или } \vartheta \ll 1,$$

получаем приближенно выражение

$$A_\varphi \approx \frac{1}{2\pi} I \int_0^\pi \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2+r^2}} \left(1 + \frac{ar\sin\vartheta\cos\varphi}{a^2+r^2}\right) d\varphi = m_d \frac{r\sin\vartheta}{(a^2+r^2)^{3/2}}, \quad (2.56)$$

где

$$m_d = \frac{1}{4} a^2 I, \quad (2.57)$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$m_d = 0{,}1\pi a^2 I \quad (2.57)^*$$

есть *магнитный дипольный момент* витка. Написав уравнение (2.39) в сферических координатах (п. П2.4), получим выражения для составляющих магнитного поля

$$H_r \approx 2\frac{A_\varphi}{r}\cos\vartheta,$$
$$H_\vartheta \approx \frac{A_\varphi}{r} \cdot \frac{r^2-2a^2}{a^2+r^2}, \quad (2.58)$$
$$H_\varphi = 0.$$

Для $r \gg a$ они описывают *поле магнитного диполя*

$$H_r = 2m_d \frac{\cos\vartheta}{r^3},$$
$$H_\vartheta = m_d \frac{\sin\vartheta}{r^3}, \quad (2.59)$$

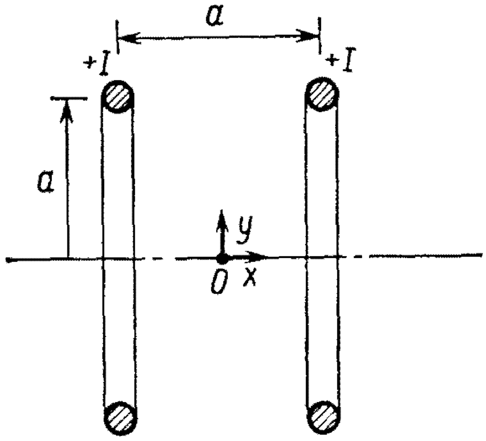
и на оси, где $\sin\vartheta = 0$ (случай $\vartheta \ll 1$), имеем

$$H_r = \frac{2m_d}{(a^2+r^2)^{3/2}}. \tag{2.60}$$

Последний результат мог бы быть получен непосредственно прямым интегрированием уравнения (2.53).

Однородные поля

2.26. *Однородное поле* (т. е. поле с постоянным вектором напряженности) может быть получено, например, в центре длинного соленоида. Другой хорошо известный пример — *двойной виток Гельмгольца* (фиг. 2.12), когда расстояние между двумя кольцевыми витками равно радиусу витка a. Используя уравнение (2.58), можно рассчитать поле вблизи центра системы (заметим, что здесь



Фиг. 2.12. Двойной виток Гельмгольца.

ортогональные координаты x, y связаны с координатами r, ϑ соотношениями $r = {}^1/_2 a \pm x$, $r\vartheta = y$). Если результирующее выражение для аксиального поля разложить в ряд Тейлора относительно центральной точки, то оказывается, что член, содержащий вторую производную, обращается в нуль вследствие равенства расстояния между катушками радиусу a. Наличие симметрии катушек относительно центра сводит к нулю нечетные члены разложения, поэтому легко видеть, что вблизи центральной точки аксиальное поле однородно с точностью до $(x/a)^4$. Для аксиальной составляющей в центре из уравнения (2.60) получим

$$H_x(0) = 2H_r\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{32}{5^{3/2}}\frac{m_d}{a^3} \approx 0{,}716\frac{I}{a}. \tag{2.61}$$

Подобные результаты могут быть получены для двойных витков различных размеров и формы. Оптимальные конструкции различных парных катушек приведены Монтгомери [7.31]; они основаны на математических расчетах, впервые предложенных Гарретом [2.9].

§ 4. ИНДУКТИВНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ПРОВОДНИКОВ

Уравнение энергии

2.27. Умножая уравнение (2.1) на $\mathbf{E}$ и складывая с уравнением (2.2), умноженным на $\mathbf{H}$, получаем *уравнение энергии* общей теории поля

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}+\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)+\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=0; \qquad (2.62)$$

здесь было использовано соотношение между двумя векторами $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$

$$\nabla\cdot(\mathbf{M}\times\mathbf{N})=\mathbf{N}\cdot(\nabla\times\mathbf{M})-\mathbf{M}\cdot(\nabla\times\mathbf{N}). \qquad (2.63)$$

2.28. Уравнение (2.62) может быть переписано в более наглядной форме. Заметим, что первый член этого уравнения характеризует *джоулевы потери*

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}=\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}. \qquad (2.64)$$

Второй член описывает *изменение энергии электромагнитного поля*, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2\right), \qquad (2.65)$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_R\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\right), \qquad (2.66)^*$$

так как произведением векторов $\mathbf{E}\cdot(\partial\mathbf{D}/\partial t)$, обусловленным учетом тока смещения в уравнении (2.1), можно пренебречь; к тому же мы полагаем $\partial\mu/\partial t\equiv 0$. Если проинтегрировать уравнение (2.62) по объему V, ограниченному замкнутой поверхностью S, и использовать теорему Гаусса (2.72), то получим уравнение энергии в интегральной форме

$$-\int_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{s}=\int_V \frac{\partial}{\partial t}(Q+W)\,dV, \qquad (2.67)$$

в котором *вектор Пойнтинга*

$$\mathbf{P}=(\mathbf{E}\times\mathbf{H}), \qquad (2.68)$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$\mathbf{P}=\frac{10^8}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}), \qquad (2.69)^*$$

представляет поток энергии (энергию в единицу времени) через поверхность. Выводы, вытекающие из этих уравнений энергии, можно найти в гл. 4; в п. П4 они распространены на случай сжимаемой жидкости.

Самоиндукция

2.29. Для полной (магнитной) энергии W, связанной с системой проводников, можно записать, используя уравнение (2.65),

$$W = \int_V \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \, dV = \int_V \frac{1}{2} \mu \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \, dV. \tag{2.70}$$

Действительно, вводя вектор-потенциал $\mathbf{A}$ и используя уравнение (2.63), получаем

$$\int (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \, dV = \int \mu \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, dV = \int \mu \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \, dV + \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \, dV; \tag{2.71}$$

однако последним интегралом можно пренебречь, так как по *теореме Гаусса*

$$\int_V [\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})] \, dV = \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} \tag{2.72}$$

он может быть выражен через поверхностный интеграл, взятый по поверхности S, отстоящей далеко от источников, где векторное поле исчезающе мало. Применяя уравнения (2.8) и (2.42), окончательно получаем

$$W = \frac{1}{8\pi} \cdot \int_{V_Q} \int_{V_{Q'}} \frac{\mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{j}_{Q'}}{r_{QQ'}} \, dV_Q \cdot dV_{Q'} \equiv \frac{1}{2} L I^2. \tag{2.73}$$

В этом выражении *индуктивность* (или *собственная индуктивность*) L (в генри) определена через распределение плотности тока $\mathbf{j}$; это основывается на предположении, что плотность тока везде остается пропорциональной полному току, т. е. $j = I \times j^* (x, y, z)$, где j^* — множитель, зависящий только от геометрии. Следует отметить, что здесь V_Q и $V_{Q'}$ относятся только к объему проводника (фиг. 2.7), в то время как в уравнении (2.70) объем интегрирования V включает как проводник, так и свободное пространство.

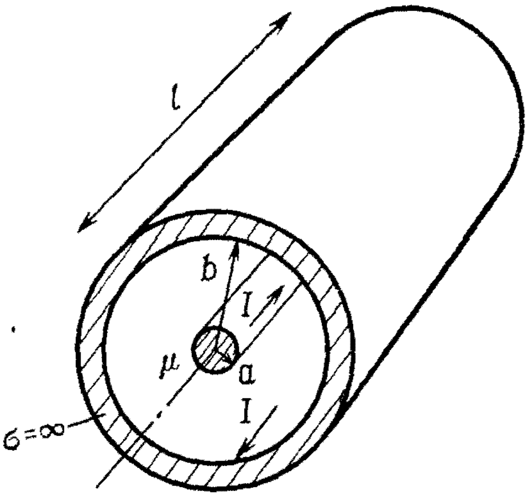
2.30. В качестве примера рассчитаем индуктивность системы коаксиальных проводников в предположении, что наружный обратный проводник обладает идеальной проводимостью ($\sigma \to \infty$) (фиг. 2.13). Энергия магнитного поля, заключенного в свободном пространстве между цилиндрами, равна

$$W_1=\frac{1}{2}\mu_0\int\limits_{V_1}H^2\,dV=\frac{\mu}{8\pi^2}I^2l\int\limits_a^b\frac{2\pi r\,dr}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}I^2l\ln\frac{b}{a} \qquad (2.74)$$

[при выводе конечного выражения было использовано уравнение (2.28)]. Поэтому высокочастотная индуктивность[1]), согласно определению, даваемому уравнением (2.73), равна

$$L=\frac{\mu_0}{2\pi}l\ln\frac{b}{a}. \qquad (2.75)$$

Из этого выражения не удается вывести формулу для индуктивности одиночного проводника радиусом a (используя предельный переход $b\to\infty$). Для расчета случая одиночного проводника необходимы тщательные вычисления, в основе которых лежит



Фиг. 2.13. Коаксиальная передающая линия.

интегральное определение L в уравнении (2.73) [2.1]; в этом случае прежнее предположение о замкнутости цепи не имеет силы (п. 2.18). В пределе постоянного тока, когда имеется однородное распределение тока по внутреннему проводнику с магнитной проницаемостью μ, магнитное поле внутри стержня определяется выражением, аналогичным уравнению (2.28),

$$H=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\left(\frac{r^2}{a^2}I\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{r}{a^2}I, \qquad (2.76)$$

и соответствующая этому полю энергия равна

$$W_2=\frac{1}{2}\mu\int\limits_{V_2}H^2\,dV=\frac{\mu}{16\pi}I^2l.$$

---

[1]) Индуктивность в случае существования только поверхностных токов в проводнике.

В пределе постоянного тока (только для внутреннего проводника) к выражению для индуктивности (2.75) добавляется член

$$\Delta L = \frac{\mu}{8\pi} l. \tag{2.77}$$

Индуктивность и закон Фарадея

2.31. Важное практическое значение имеет выражение для магнитного потока, связанного с системой проводников C (см. фиг. 2.2),

$$\phi = \int\limits_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = LI, \tag{2.78}$$

здесь L — в генри, I — в амперах. Поэтому индуцированное напряжение

$$U_i = \oint\limits_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \tag{2.79}$$

вызванное изменением магнитного потока, может быть записано. согласно уравнению (2.14), в виде

$$U_i = -\frac{d}{dt}\left[\int\limits_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}\right], \tag{2.80}$$

или

$$U_i = -\frac{d(LI)}{dt}. \tag{2.81}$$

Для доказательства уравнения (2.78) (в простейшем случае не зависящей от времени индуктивности L) достаточно указать, что работа, совершаемая в единицу времени внешним источником тока и идущая на поддержание постоянства тока в цепи при изменении магнитного потока, равна

$$\frac{dW}{dt} = -IU_i = -I\frac{d\phi}{dt} = -KI\frac{dI}{dt},$$

если $\phi = KI$ (K — постоянная). При отсутствии омических потерь это выражение должно быть равно приращению магнитной энергии, которое, согласно (2.73), может быть выражено как

$$\frac{dW}{dt} = LI\frac{dI}{dt};$$

поэтому, по крайней мере для случая не зависящей от времени индуктивности L, находим $K = L$ и $\phi = LI$, как и в уравнении (2.78).

2.32. В качестве примера рассчитаем собственную индуктивность линии передачи, образованной двумя параллельными проводниками (фиг. 2.5). В высокочастотном пределе связанный с системой поток характеризуется магнитными силовыми линиями, пересекающими ось x между проводниками; с помощью уравнения (2.37) находим

$$\frac{L}{l} I = \frac{\Phi}{l} = \mu_0 \int\limits_{a-{}^1/_2 d}^{{}^1/_2 d-a} H\,dx = \frac{2}{\pi}\mu_0 p I \int\limits_0^{{}^1/_2 d-a} \frac{dx}{p^2-x^2} =$$
$$= -\frac{\mu_0}{\pi} I \ln \frac{p+a-{}^1/_2 d}{p-a+{}^1/_2 d}. \qquad (2.82)$$

После простого преобразования (используя соотношение $p^2 = {}^1/_4 d^2 - a^2$) получим для индуктивности выражение

$$L = -\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{{}^1/_2 d - p}{a} = -\frac{\mu_0}{\pi} l \left[\ln\frac{d}{a} + \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{d}\right)\right], \qquad (2.83)$$

или, пренебрегая членами второго порядка малости (когда $a/d \ll 1$),

$$L \approx \frac{\mu_0}{\pi} l \left[\ln\frac{d}{a} - \left(\frac{a}{d}\right)^2\right]. \qquad (2.84)$$

Воспользовавшись уравнением (2.38), в котором игнорируется эффект близости, точно так же получим выражение для индуктивности [подставляя $p \to {}^1/_2 d$ в уравнение (2.82) и используя те же приближения]

$$L \approx \frac{\mu_0}{\pi} l \left[\ln\frac{d}{a} - \frac{a}{d}\right]. \qquad (2.85)$$

Взаимная индуктивность

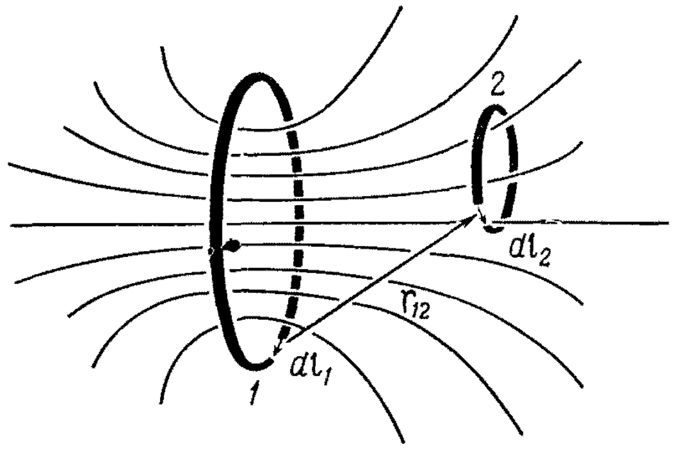
2.33. Из уравнения (2.73) следует, что если рассматривать две системы проводников, по которым текут токи I_1 и I_2, полная энергия таких систем может быть записана в виде

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \pm L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2, \qquad (2.86)$$

где L_1 и L_2 — индуктивности каждой из двух систем, и величина $L_{12} \equiv M$, определяемая уравнением (2.73), называется *взаимной индуктивностью*. Из (2.73) можно определить L_{12} для систем с линейными токами [по аналогии с выводом уравнений (2.53), (2.54)]; получающийся результат известен как *интеграл Неймана*

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint\limits_1 \oint\limits_2 \frac{|d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2|}{r_{12}}. \qquad (2.87)$$

Согласно приведенным выражениям, взаимная индуктивность между двумя цепями *1* и *2* (фиг. 2.14) определяется как поток, который пронизывает цепь *1* и вызывается единичным током в цепи *2* (или наоборот). Знак плюс или минус в уравнении (2.86)



Фиг. 2.14. Взаимная индуктивность.

зависит от того, является ли произведение $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$ положительным или отрицательным, т. е. имеет ли наведенный в цепи *1* поток тот же знак, что и поток, создаваемый собственным током в проводнике *1*.

§ 5. МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

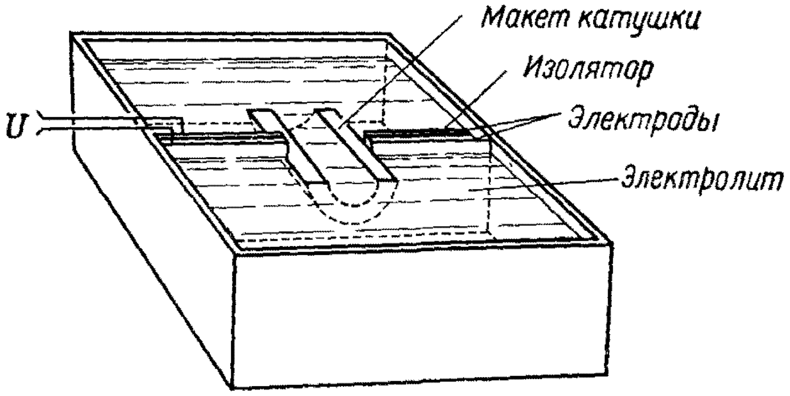
2.34. Задача расчета и графического построения магнитных полей, обусловленных заданным распределением электрических токов, была решена с помощью разнообразных *числовых и аналоговых методов*. Очевидно, что наиболее непосредственным способом является измерение распределения поля в катушке с помощью магнитных датчиков в условиях, максимально близких к экспериментальным. Для решения задачи Дирихле было предложено множество аналоговых методов. Наконец, с появлением больших вычислительных машин все большее применение находят числовые методы. Ниже мы опишем только некоторые из наиболее распространенных методов расчета магнитных полей и приведем ряд характерных результатов; подробная информация содержится в имеющейся литературе (см., например, [2.8]).

Электролитическая ванна

2.35. Чтобы лучше разобраться в методе, в котором используется *электролитическая ванна*, разберем один пример. Рассмотрим соленоидальную катушку (половину) из изоляционного материала, погруженную в электролит (например, медный купорос) (фиг. 2.15). Прикладывая к электродам разность потенциалов, получаем распределение электрического поля в проводящей жидкости, которое описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}' &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}' &= 0. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Эти уравнения могут быть выведены из уравнений Максвелла (2.2), (2.4), в которых можно пренебречь изменением магнитного поля и не учитывать заряды статического электричества, исчезающие



Фиг. 2.15. Электролитическая ванна.

вследствие электропроводности электролита. Распределение электрического поля определяет распределение плотности тока

$$\mathbf{j}' = \sigma'\mathbf{E}', \tag{2.89}$$

где σ^1 — электропроводность (штрих относится к среде в ванне). Из уравнений (2.8) и (2.3) для магнитного поля в пространстве без токов имеем

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Таким образом, задача нахождения распределения магнитного поля вокруг диамагнитной катушки при обеспечении правильных граничных условий (см. следующий пункт) формально тождественна задаче определения электрического поля (или распределения тока) вокруг макета катушки, помещенного в ванну с электролитом.

2.36. Используя закон Ампера (2.12) для подходящего замкнутого контура C, получаем

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \tag{2.91}$$

В случае электролитической ванны из уравнений (2.88) и теоремы Стокса (2.11) получим для того же контура

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' = U', \tag{2.92}$$

где U' — напряжение, приложенное к электродам. Разрыв пространства, обусловленный введением изолированных между собой электродов, необходим не только по практическим соображениям (простота «введения» электрического поля в ванну), но также для получения *полной аналогии* между $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}$. Кроме того, поскольку электрическое поле перпендикулярно электродам, для обеспечения аналогии необходимо расположить их под прямым углом к воображаемым силовым линиям локального поля $\mathbf{H}$ или отнести в область, далекую от катушки. Вводя коэффициент пропорциональности

$$\gamma = \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{E}'} \tag{2.93}$$

и коэффициент масштаба для макета

$$\lambda = \frac{l'}{l} \tag{2.94}$$

(l' — линейный размер макета в ванне, l — реальный размер), из уравнений (2.91), (2.92) получим

$$\nu = \frac{\lambda I}{U'}. \tag{2.95}$$

Это соотношение количественно определяет связь между $\mathbf{H}$ и моделирующим полем $\mathbf{E}'$.

2.37. Используя метод аналогии, можно выразить магнитный поток ϕ, полную индуктивность L и полную энергию W реальной катушки через электрические параметры системы, находящейся в электролитической ванне. Полный ток I', протекающий в ванне, равен

$$\mathbf{I}' = \int \mathbf{j}' \cdot d\mathbf{s}' = \sigma' \int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}',$$

а полный магнитный поток, связанный с проводником в реальном пространстве, равен

$$\phi = \mu_0 \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \frac{\nu}{\lambda^2} \int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = \mu_0 \frac{\gamma}{\lambda^2} \frac{I'}{\sigma'}. \tag{2.96}$$

Отсюда, используя определение индуктивности и уравнение (2.95), можно написать

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{\lambda\sigma'} \frac{I'}{U'}, \tag{2.97}$$

где U'/I' — полное сопротивление в ванне. Теперь для магнитной энергии легко получить выражение

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\nu^2}{\lambda^3} \frac{I'U'}{\sigma'}. \tag{2.98}$$

2.38. Электрическое поле в электролите обычно измеряется двойным зондом (имеющим два электрода), разность потенциалов между электродами которого, деленная на расстояние между ними, непосредственно дает значение составляющей электрического поля. По этому принципу уже созданы очень сложные системы, которые автоматически измеряют поле и вычерчивают его [2.10]. В некоторых из них датчик прибора для вычерчивания кривых, управляемый с помощью сервомеханизма, следует вдоль силовой линии, так что прибор непосредственно вычерчивает эквипотенциальные линии. Метод электролитической ванны может быть применен и для систем проводников более сложных, чем катушка, показанная на фиг. 2.15 [2.11].

Цепь, состоящая из активных сопротивлений

2.39. Для двумерных задач электролитическую ванну можно заменить плоской проводящей средой, такой, как *графитовая бумага* или *листовой манганин* [2.10]. Очевидно, что такая среда, обладающая непрерывно распределенной проводимостью, в конечном счете может быть заменена цепью из сосредоточенных сопротивлений.

2.40. Решение дифференциального уравнения Лапласа можно получить, измеряя распределение напряжения в цепи, состоящей из активных сопротивлений. Для доказательства рассмотрим функцию Φ, заданную в плоскости (x, y) (фиг. 2.16). Разложение ее в ряд Тейлора относительно точек P, Q на оси x дает

$$\Phi_P = \Phi_O - a\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_O + \frac{a^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_O - \frac{a^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_O + \frac{a^4}{4!}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)_O - \ldots,$$

$$\Phi_Q = \Phi_O + a\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_O + \frac{a^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_O + \frac{a^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_O + \frac{a^4}{4!}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)_O + \ldots .$$

Суммирование этих выражений и перегруппировка приводят к равенству, справедливому с точностью до члена порядка $\frac{1}{12}a^2\,(\partial^4\Phi/\partial x^4)_O$,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{a^2}\{(\Phi_Q - \Phi_O) + (\Phi_P - \Phi_O)\}.$$

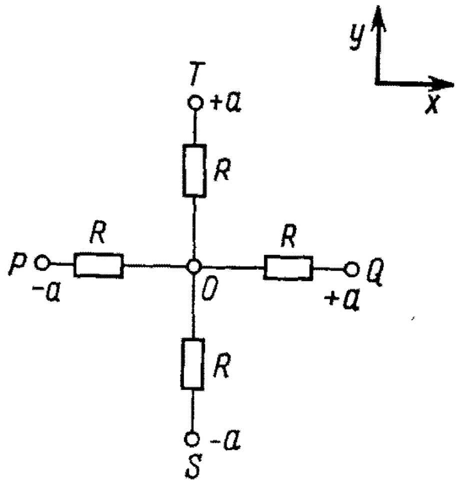
Поэтому уравнение Лапласа можно приближенно записать

$$\Delta\Phi \approx \frac{1}{a^2}\{(\Phi_P - \Phi_O) + (\Phi_S - \Phi_O) + (\Phi_Q - \Phi_O) + (\Phi_T - \Phi_O)\} = 0. \tag{2.99}$$

С другой стороны, если рассматривать электрическую цепь, крайним точкам которой O, P, S, Q, T соответствуют потенциалы $U_O, \ldots, U_T$, то, применяя *закон Кирхгофа* в точке O, получаем равенство

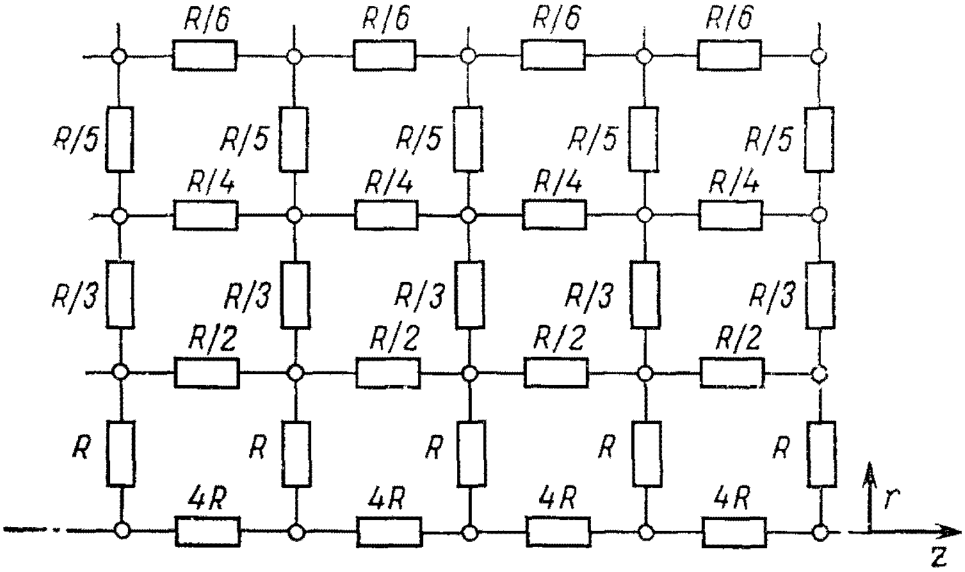
$$\frac{U_P-U_O}{R}+\frac{U_S-U_O}{R}+\frac{U_Q-U_O}{R}+\frac{U_T-U_O}{R}=0. \qquad (2.100)$$

Из сравнения этого выражения с уравнением (2.99) с очевидностью следует, что напряжение U прямо пропорционально искомому потенциалу Φ при условии, что в цепь введены правильные граничные условия.



Фиг. 2.16. Точка пересечения в двумерной геометрии.

2.41. Рассмотрение цепи, состоящей из активных сопротивлений, представляет практический интерес потому, что этот метод



Фиг. 2.17. Цепь из активных сопротивлений как аналог задач, обладающих вращательной симметрией.

может быть распространен на трехмерные задачи, обладающие вращательной симметрией, для которых уравнение Лапласа записывается в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \qquad (2.101)$$

Поступая так же, как и раньше, можно показать [2.12], что для этого случая резистивная цепь должна быть построена из сопротивлений различной величины (фиг. 2.17), что обусловлено наличием расходимости цилиндрической геометрии.

Модели с высокочастотным питанием

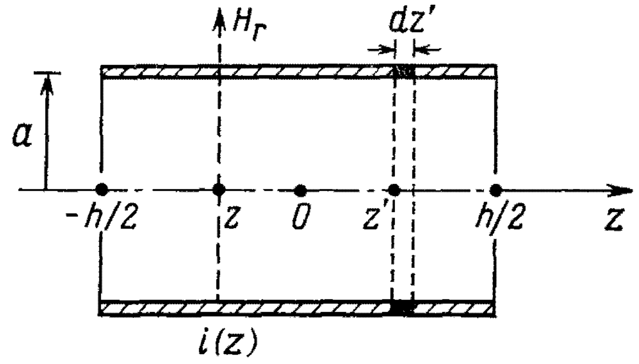
2.42. Наиболее прямым методом вычисления является измерение с помощью магнитных датчиков распределения поля в реальной катушке или в ее уменьшенной модели, линейные размеры которой уменьшены в λ раз, т. е. $l' = \lambda l$.

Для примера предположим, что требуется определить распределение магнитного поля одновиткового соленоида, присоединенного к большой конденсаторной батарее; период разряда системы равен T. Чтобы облегчить измерения, удобно использовать модель катушки малого масштаба и питать ее от непрерывного высокочастотного генератора с частотой ν' [2.10]. Если требуется учесть эффект проникновения поля в проводник, то необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $s/l \approx s'/l'$, где s — толщина скин-слоя в реальной катушке; штрихованные величины s' и l' относятся к модели. Так как $s \sim \sqrt{T} \sim 1/\sqrt{\nu}$ (п. 3.17 и табл. 4.II), частота ν' высокочастотного генератора определяется из условия

$$\lambda = \frac{l'}{l} = \frac{s'}{s} \approx \sqrt{\frac{\nu}{\nu'}}. \qquad (2.102)$$

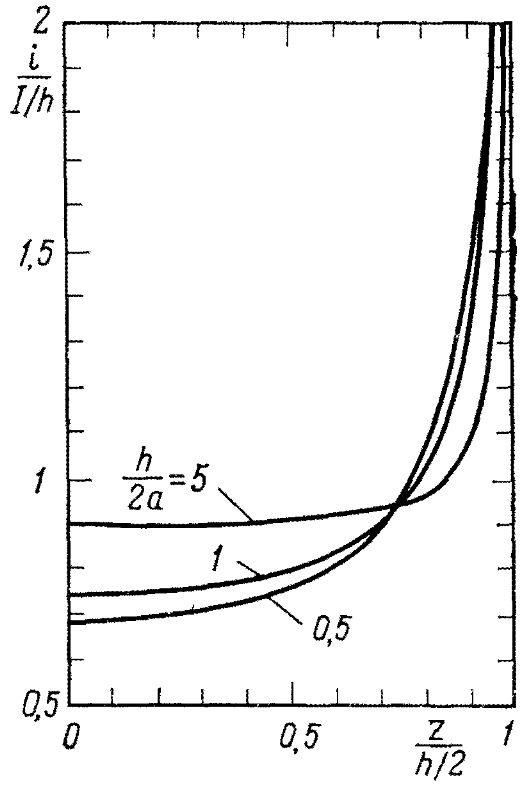
Численные методы

2.43. В последние годы для расчетов магнитных полей, определяемых заданным распределением тока, все чаще используются цифровые вычислительные машины. Многие программы вычислительных машин основаны на модели нитевидных токов [2.13], использование которой не только упрощает программу; эта модель очень гибка и легко задается всего несколькими параметрами. Использование вычислительной машины особенно ценно, когда к ее выходу присоединен самописец, который автоматически выдает требуемый результат (контурные линии и т. п.) в графической форме. Возможно даже получить стереоскопическую картину, которая дает трехмерное изображение поля. Несомненно, что по мере широкого распространения больших вычислительных машин и стандартных программ численные методы станут преобладающими и с их помощью будет решаться бóльшая часть задач о магнитных полях. В работах [2.14—2.16] приведены протабулированные результаты численных расчетов цилиндрических соленоидов в форме, удобной для решения многих задач.



Фиг. 2.18. «Тонкий» одновитковый соленоид.

2.44. Иногда представляется возможным уменьшить объем вычислений, если удается частично решить задачу аналитическими



Фиг. 2.19. Распределение тока для соленоида, изображенного на фиг. 2.18 [2.17].

методами. Пусть, например, требуется определить распределение линейного тока $i(z)$ в тонком соленоиде радиусом a; полный ток соленоида

$$I = \int_{-1/2h}^{1/2h} i(z)\, dz$$

задан (фиг. 2.18). Такой соленоид можно представить в виде множества нитевидных витков, по каждому из которых протекает ток $i(z)\,dz$. В п. 2.25 был приведен приближенный расчет распределения магнитного поля такого витка. Более общее решение дано в работе [2.2, стр. 271]; в частности, вклад в радиальную составляющую поля H_r в точке $(z,\ r=a)$, который дает бесконечно тонкий виток, находящийся в плоскости z', равен

$$dH_r = f(z-z',\ a)\ i(z')\,dz'.$$

Функция $f(z,\ r)$, содержащая эллиптические интегралы, приводится в упомянутой выше работе. Поскольку должно выполняться граничное условие $H_r \equiv 0$, получаем *интегральное уравнение*

$$\int\limits_{-1/2h}^{1/2h} f(z-z',\ a)\,i(z')\cdot dz' \equiv 0,$$

которое и определяет искомое распределение тока. Эта задача была численно решена Бардотти и сотр. [2.17], результат показан на фиг. 2.19. Плотность тока у концов соленоида возрастает как $(^1/_4h^2 - z^2)^{-1/2}$. Влияние такого распределения тока на магнитное поле и индуктивность показано на фиг. П1.8—П1.10.

Аналогичная задача о бесконечно тонком соленоиде была решена Шнеерсоном [2.18]. На основе полученных им результатов были рассчитаны кривые, приведенные на фиг. П1.9, П1.10 (см. также гл. 7).

Третья глава Теория диффузии магнитного поля

§ 1. ДИФФУЗИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ТВЕРДЫЙ ПРОВОДНИК, ОБЛАДАЮЩИЙ ПОСТОЯННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ

3.1. В то время как в гл. 2 мы имели дело главным образом с магнитным полем $\mathbf{H}$ в вакууме, сейчас нас будет интересовать более специальная задача о проникновении поля внутрь проводника. Чтобы исследовать проникновение поля в *несжимаемую, проводящую и электрически изотропную* среду, опять начнем с уравнений Максвелла, приведенных в п. 2.1, и закона Ома

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \tag{3.1}$$

связывающего плотность тока $\mathbf{j}$ с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$. Будем полагать в этой главе, что электропроводность является материальной константой (не меняющейся в пространстве и времени) и обозначим $\sigma = \sigma_0$.

3.2. Взяв ротор от уравнения (2.1) и используя уравнение (2.6), находим

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma_0 \nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}), \tag{3.2}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость. С помощью дифференциального соотношения (2.40) и уравнений (2.2) и (2.3) это выражение преобразуется в обычное *волновое уравнение*

$$\Delta\mathbf{H} = \sigma_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \tag{3.3}$$

где

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{3.4}$$

есть магнитная индукция. Примем, что магнитная проницаемость $\mu = \mu_0 \cdot \mu_R$ не меняется в пространстве и времени. Чаще всего будем полагать просто $\mu_R = 1$, так как рассматриваются сильные магнитные поля (значительно превышающие поле насыщения).

В непроводящей среде ($\sigma_0 = 0$), где любое возмущение поля распространяется со скоростью света $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, уравнение (3.3) сводится к известному *волновому уравнению* в форме *гиперболического дифференциального уравнения.*

3.3. В проводящей среде токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости и, следовательно, в уравнении (3.3) можно отбросить последний член, определяемый током смещения в (2.1) (как было показано в п. 2.2). Тогда (3.2) сводится (при постоянных σ, μ) к *уравнению магнитной диффузии*

$$\Delta\mathbf{H} - \frac{1}{\varkappa_0}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0, \qquad (3.5)$$

где

$$\varkappa_0 = \frac{1}{\sigma_0\cdot\mu} \qquad (3.6)$$

есть *коэффициент диффузии*, или, в практической системе электрических единиц,

$$\varkappa_0 = \frac{10^9}{4\pi\cdot\sigma_0\cdot\mu_R}. \qquad (3.7)^*$$

Этот коэффициент определяется произведением $\sigma_0\cdot\mu$, которое может быть очень большим для ферромагнитных материалов. Таким образом, проводник из ферромагнетика в диффузионных процессах ведет себя (до предела намагничивания) так, как если бы его электропроводность была увеличена в μ_R раз.

3.4. Взяв ротор от уравнения (3.5), получаем дифференциальное уравнение для плотности тока $\mathbf{j}$

$$\Delta\mathbf{j} - \frac{1}{\varkappa_0}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} = 0, \qquad (3.8)$$

аналогичное уравнению для напряженности магнитного поля. В такой же форме записывается уравнение для вектора-потенциала $\mathbf{A}$ магнитного поля, определенного в (2.39).

3.5. В этой главе и далее в гл. 4 мы будем описывать процесс диффузии главным образом через напряженность магнитного поля H, а не через плотность тока j или магнитную индукцию B, хотя j и B удовлетворяют тому же *параболическому дифференциальному уравнению* (3.5). Это решение до некоторой степени произвольно, хотя в его пользу говорит тот факт, что для основной, тангенциальной составляющей поля H (п. 2.3) диффузионное уравнение по форме тождественно уравнениям для некоторых других скалярных величин, имеющих хорошо известные решения, как будет показано ниже. Против него — то, что при описании среды, обладающей магнитной проницаемостью, употребляется главным образом магнитная индукция B, а не H, даже если они равнозначны (что имеет место при сильных магнитных полях).

3.6. Уравнение (3.5) по своей форме тождественно *уравнению теплопроводности*

$$\Delta\theta - \frac{1}{\chi}\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0, \tag{3.9}$$

где θ — температура; $\chi = \lambda/c_v$ называют *температуропроводностью*, или коэффициентом диффузии, λ — *теплопроводность* и c_v — *теплоемкость* единицы объема. В предшествующем уравнении, однако, переменной являлась векторная величина; в прямоугольной системе координат уравнение для соответствующей составляющей принимает форму (3.9). Наличие формальной аналогии между диффузией магнитного поля и теплопроводностью особенно полезно, так как позволяет использовать для магнитных полей большое количество известных решений уравнения (3.9) при соответствующих начальных и граничных условиях: при этом применяется подстановка

$$\begin{gathered} H \longleftrightarrow \theta, \\ \frac{1}{\varkappa_0} \longleftrightarrow \frac{1}{\chi}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Решения задач теплопроводности собраны, например, в обширной книге Карлслоу и Джегера [3.1]. Дифференциальное уравнение (3.9) также используется в других областях физики, например в теории обычной диффузии (см. Кренк [3.2]).

3.7. В последующих пунктах мы проанализируем некоторые решения уравнения (3.5), представляющие особый интерес для задач о магнитных полях. Они относятся главным образом к задачам при *нестационарном граничном условии* типа

$$H_z(x_b, y_b, z_b;\ t) = f(t) \text{ для } 0 \leqslant t < \infty, \tag{3.11}$$

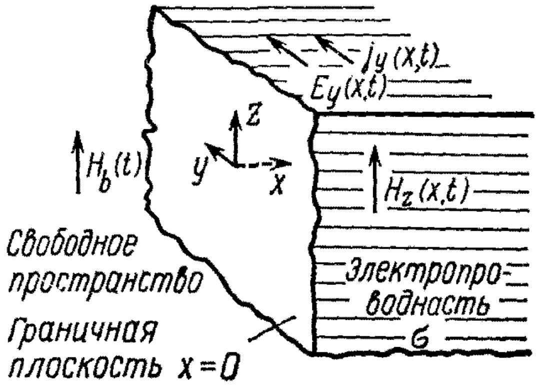
где индекс b указывает на то, что координата берется на границе. За исключением примеров, в которых исследуется затухание однородного магнитного поля, обычно мы будем рассматривать проводник, на который поле первоначально не действует, т. е. при *начальном условии*

$$H_z(x,\ y,\ z,\ 0) \equiv 0. \tag{3.12}$$

§ 2. ДИФФУЗИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОВОДЯЩЕЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Основные одномерные уравнения

3.8. Начнем анализ задачи диффузии, ограничиваясь плоским одномерным случаем. Хотя такая геометрия является несколько идеализированной, однако ее простота позволяет получить относительно несложные аналитические решения задачи диффузионного процесса, которые легко анализируются. Система координат ориентируется таким образом, чтобы оси y, z лежали на поверхности, а ось x была направлена в проводник, так что $\mathbf{H} = (0, 0, H_z)$, $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$ и $\mathbf{j} = (0, j_y, 0)$ (фиг. 3.1).



Фиг. 3.1. Диффузия в проводящее полупространство.

Пренебрегая членом, обусловленным током смещения, упростим уравнения (2.8) и (2.2) с помощью выражений п. П2.4:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -j_y, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{3.14}$$

или, в практической системе электрических единиц (А, В, Э, см, с),

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -0{,}4\pi j_y, \qquad (3.13)^*$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -10^{-8}\mu_R \frac{\partial H_z}{\partial t}. \qquad (3.14)^*$$

При постоянных σ_0, μ *диффузионное уравнение* имеет вид

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa_0}\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \tag{3.15}$$

где $\varkappa_0$ определяется уравнением (3.6) или (3.7).

Основное решение

3.9. Общее решение этого диффузионного уравнения при («стационарном») граничном условии

$$H_z(0, t) = H_0(t) \qquad \text{для} \qquad -\infty < t < \infty \tag{3.16}$$

известно из математической физики (см., например, [3.1] или [3.4]) и может быть записано в форме

$$H_z(x, t) = H_{\text{стац}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty H_0\left(t - \frac{1}{4\varkappa_0}\frac{x^2}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2}\, d\lambda. \tag{3.17}$$

В большинстве рассматриваемых задач мы будем иметь дело с граничными условиями «переходного» типа

$$H_z(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad -\infty < t < 0, \\ H_0(t) & \text{для} \quad 0 \leqslant t < \infty \end{cases} \tag{3.18}$$

совместно с начальным условием

$$H_z(x, 0) = 0 \qquad \text{для} \qquad 0 < x < \infty. \tag{3.19}$$

В соответствии с этим пределы интегрирования в уравнении (3.17) изменяются, и мы получаем выражение

$$H_z(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/2\sqrt{\varkappa_0 t}}^{\infty} H_0\left(t - \frac{1}{4\varkappa_0}\frac{x^2}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2}\, d\lambda, \tag{3.20}$$

которое может быть преобразовано в

$$H_z(x, t) = H_{\text{стац}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x/2\sqrt{\varkappa_0 t}} H_0\left(t - \frac{1}{4\varkappa_0}\frac{x^2}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2}\, d\lambda. \tag{3.21}$$

Первый член (3.21) представляет собой *«стационарное»* решение (3.17), тогда как второй определяется *переходным* характером граничного условия (3.18) и обращается в нуль при $t \to \infty$.

Произведя замену переменного подстановкой $\lambda^2 \to x^2 \times \times [4\varkappa_0 (t-\tau)]^{-1}$ и интегрируя по частям выражение (3.20), получаем

$$H_z(x, t) = H_z(0, t) - H_z(0, 0)\cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_0 t}}\right) - \\ - \int\limits_0^t \frac{dH_z(0, \tau)}{d\tau}\cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_0 (t-\tau)}}\right) d\tau,$$

откуда следует

$$\frac{\partial H_z(x, t)}{\partial x} = -\frac{H_z(0, 0)\exp(-x^2/4\varkappa_0 t)}{\sqrt{\pi\varkappa_0 t}} - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa_0}} \int\limits_0^t \frac{dH_z(0, \tau)}{d\tau} \frac{\exp[-x^2/4\varkappa_0(t-\tau)]}{(t-\tau)^{1/2}}\, d\tau;$$

здесь введена функция ошибок и ее производная [см. п. П2, уравнения (П2.1) и (П2.3)]. Для дальнейшего использования приведем также выражения для электрического поля на поверхности плоского проводника, на который воздействует импульс магнитного поля при условии $H_z(0, 0) = 0$; это выражение непосредственно следует из уравнений (3.1), (3.13) и имеет вид

$$E_y(0, t) = \frac{j_y}{\sigma_0} = \mu \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dH_z(0, \tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}. \qquad (3.2$$

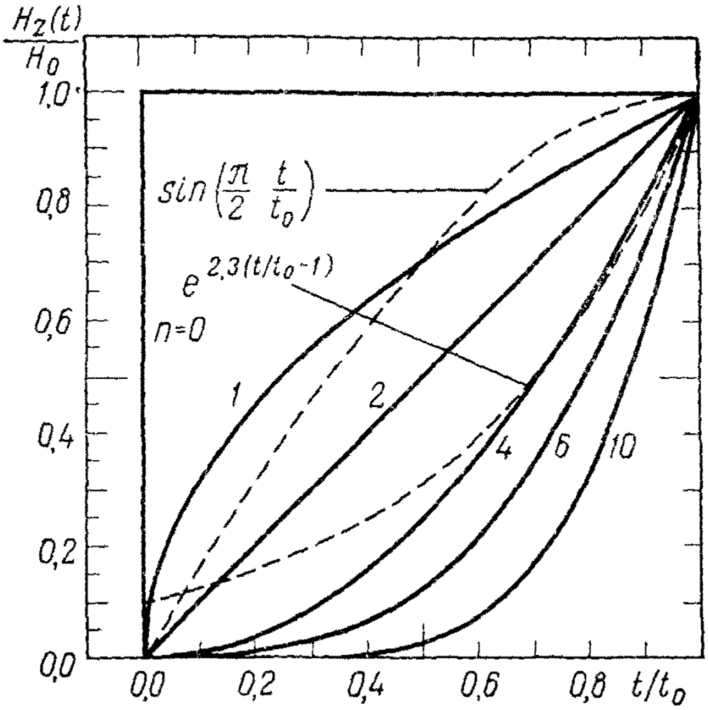
Если ввести соответствующее граничное условие в (3.17), (3.2 или (3.21) и выполнить указанное интегрирование, то можн получить частные решения диффузионного уравнения. Для реше ния задач диффузии часто используется другой метод, основанны на *преобразовании Лапласа* и описанный в обширной литерату (см. [3.1] или [3.3]).

Граничное условие переходного типа $H_z = H_0$ (const)

3.10. Рассмотрим задачу при граничном условии, заданно в виде ступенчатой функции (фиг. 3.2, $n = 0$)

$$H_z(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ H_0\ (\text{const}) & \text{для } t \geqslant 0, \end{cases} \qquad (3.23)$$

и при обычном начальном условии (3.19). Тогда с помощью функции



Фиг. 3.2. Временная зависимость для некоторых граничных полей, рассматриваемых в гл. 3 [индекс n относится к случаю граничного условия полиномиального вида, уравнение (3.26)].

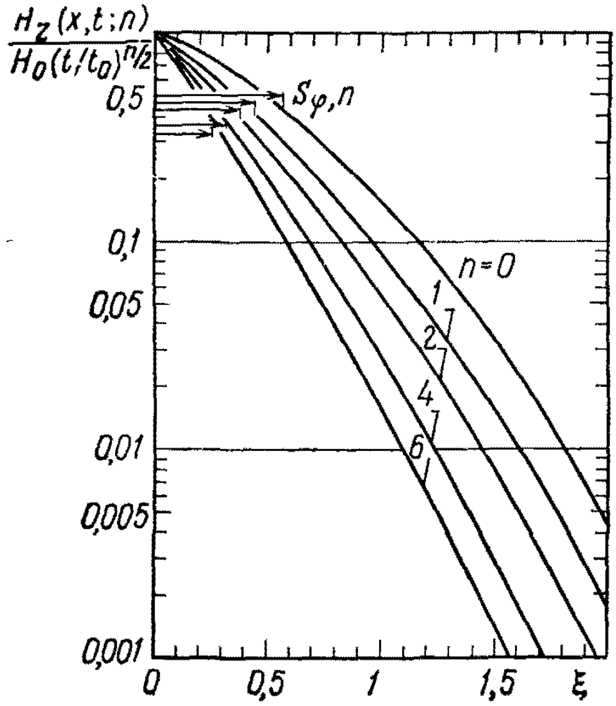
ошибок и определения (П2.6) общее решение (3.20) может быть записано в виде

$$H_z(x, t) = H_0(1 - \operatorname{erf} \xi) = H_0 \operatorname{erfc} \xi; \qquad (3.24)$$

здесь, как и во всех дальнейших примерах, мы используем *переменную подобия*

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\varkappa_0 t}}, \tag{3.25}$$

где $\varkappa_0$ определяется из (3.6) или (3.7). Графическое изображение $H_z(x, y)$ как функции ξ представлено на фиг. 3.3. Использование этого решения для реальных физических задач требует некоторой



Фиг. 3.3. Диффузионные магнитные поля, соответствующие граничным полям при $n = 0, 1, 2, 4, 6$ на фиг. 3.2.

Толщина скин-слоя магнитного потока $s_{\varphi, n}$ [уравнение (3.32)] указана для каждого отдельного случая.

осторожности, так как граничное условие в виде идеализированной ступенчатой функции приводит к бесконечно высокой температуре на поверхности проводника, как будет показано в уравнении (4.30).

Граничное условие переходного типа $H_z = H_0 (t/t_0)^{1/2n}$

3.11. Более общему случаю при граничном условии

$$H_z(0, t; n) = H_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2n} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{3.26}$$

где n — положительное целое число, четное или нечетное, соответствует решение (как показано в [3.1, стр. 63])

$$H_z(x, t; n) = H_0 \Gamma\left(\frac{1}{2} n + 1\right) \left(2\sqrt{\frac{t}{t_0}}\right)^n \{i^n \operatorname{erfc} \xi\}, \tag{3.27}$$

которое справедливо и для ранее разобранных примеров при $n = 0$. В этом выражении используется система обозначений, определяемая уравнением (П2.7); $\Gamma(^1/_2 n + 1)$ представляет собой гамма-функцию, свойства которой

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{и} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{3.28}$$

будут использованы позднее.

Следует сделать два замечания относительно полиномиального решения общего вида (3.27). Первое: так как (3.15) является линейным дифференциальным уравнением, то при начальном условии, представляющем собой линейную комбинацию условий (3.26) при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, более общее решение может быть выражено в виде линейной комбинации решений (3.27). Второе замечание касается кривой при $n = 1$ [точное решение для этого случая приведено в уравнении (4.85)]. Как видно из фиг. 3.2, эта кривая довольно хорошо аппроксимируется четвертью периода синусоиды (в этом случае отсутствует простое решение, см. п. 3.14). Ниже будет показано, что бо́льшая часть явлений, зависящих от диффузии магнитного поля, мало чувствительна к форме импульса граничного условия, поэтому рассмотренный случай можно использовать в качестве хорошего приближения для важной и распространенной задачи с граничным условием в виде синусоидальной функции.

Понятие толщины скин-слоя

3.12. С возрастанием величины x функция, описывающая магнитное поле внутри проводника в заданный момент времени, быстро уменьшается до очень малых значений (фиг. 3.3). На практике полагают, что проникновение поля в проводник ограничивается характеристической глубиной s. Определение s может быть связано с уменьшением амплитуды до определенной величины, например в e раз, как принимается для обычной толщины токового скин-слоя δ [уравнение (3.42)]. Аналогично при

$$\xi = \frac{s}{2\sqrt{\varkappa_0 t}} = 1,$$

т. е. при толщине скин-слоя, равной

$$s = 2\sqrt{\varkappa_0 t}, \tag{3.29}$$

поле, соответствующее, например, решению (3.24), уменьшается до 17% от своего значения на поверхности.

Представляется удобным определить *«толщину скин-слоя магнитного потока»* s_φ через полный диффузионный поток $\phi(t)$ и плотность потока на поверхности проводника $B_z(0, t)$, т. е.

$$B_z(0, t)\, s_\varphi = \phi(t) = \int_0^\infty B_z(x, t)\, dx. \tag{3.30}$$

Так как мы полагаем, что магнитная проницаемость не зависит от пространства и времени, это определение можно переписать для напряженности магнитного поля в том же виде:

$$H_z(0, t)\, s_\varphi = \int_0^\infty H_z(x, t)\, dx. \tag{3.31}$$

Для примера рассчитаем толщину скин-слоя $s_{\varphi,\,n}$, соответствующую полиномиальному решению общего вида (3.27). Согласно определению (3.1), можно написать

$$s_{\varphi,\,n} = \frac{1}{H_z(0,\, t;\, n)} \int_0^\infty H_z(x,\, t;\, n)\, dx = 2^n \Gamma\left(\frac{1}{2} n + 1\right) 2 \sqrt{\varkappa_0 t}\, I_n,$$

где I_n с помощью уравнений (П2.7) и (П2.9) определяется в виде

$$I_n = \int_0^\infty \{i^n \operatorname{erfc} \xi\}\, d\xi = \{i^{n+1} \operatorname{erfc} 0\} = \frac{1}{2^{n+1}\Gamma\,[{}^1/_2\,(n+1)+1]}.$$

Окончательно получаем

$$s_{\varphi,\,n} = \frac{\Gamma\,({}^1/_2 n + 1)}{\Gamma\left({}^1/_2 n + \frac{3}{2}\right)} \sqrt{\varkappa_0 t}. \tag{3.32}$$

Иногда удобно определить толщину скин-слоя через энергию, рассеиваемую в процессе диффузии (см. гл. 4). Все эти величины для различных граничных условий приведены в табл. 4.II.

Граничное условие $H_z = H_0 e^{t/\tau}$

3.13. Решение уравнения (3.15) при непрерывном граничном условии

$$H_z(0,\ t) = H_0 e^{t/\tau} \text{ для } -\infty < t < \infty \tag{3.33}$$

вытекает из уравнения (3.17) или более непосредственно из уравнения (3.15), если искать решение в виде $e^{t/\tau} f(x)$.

Функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f}{\varkappa_0 \tau},$$

откуда без труда следует общее решение

$$H_z(x, t) = H_0 e^{t/\tau}\left(A_1 e^{-x/x_0} + A_2 e^{+x/x_0}\right),$$

где A_1, A_2 — постоянные и

$$x_0 = \sqrt{\varkappa_0 \tau}.$$

В нашем случае единственным физически приемлемым решением является

$$H_z(x, t) = H_0 \exp\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{x_0}\right). \qquad (3.34)$$

Для толщины скин-слоя магнитного потока, определенной в (3.31), имеем

$$s_\varphi = x_0 = \sqrt{\varkappa_0 \tau}. \qquad (3.35)$$

Если параметр

$$\tau = \frac{H}{dH/dt}$$

зависит от времени $\tau = \tau(t)$, то для функции f получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f}{\varkappa_0 \tau}\left(1 - \frac{t}{\tau}\frac{d\tau}{dt}\right).$$

Видно, что прежние соотношения остаются приблизительно верными при условии

$$\frac{d\tau}{dt} \ll \frac{\tau}{t}.$$

Примерно экспоненциальный рост поля наблюдается в установках, использующих принцип сжатия магнитного потока, поэтому в случае таких экспериментов простое решение (3.34) оказывается полезным для оценки диффузии поля (гл. 8 и 9).

Граничное условие переходного типа $H_z = H_0 \sin \omega t$

3.14. Случай, который часто встречается на практике, так как он почти точно соответствует диффузии поля в LC-цепи (см. п. 6.6), представлен граничным условием

$$H_z(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ H_0 \sin \omega t & \text{для } t > 0, \end{cases} \qquad (3.36)$$

где $\omega = 2\pi/T$. Используя интегральное соотношение ([3.1], стр. 65)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin\left(\omega t - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\delta^2}\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2} d\lambda = e^{-x/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right), \qquad (3.37)$$

где

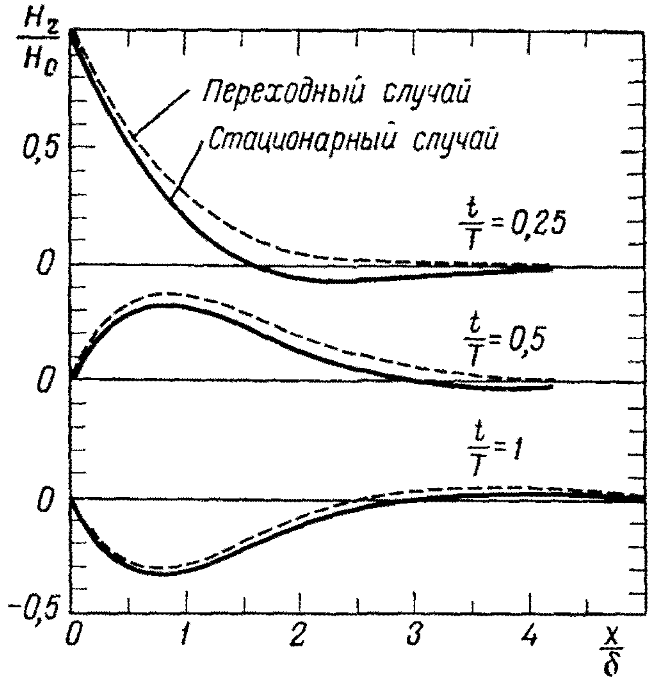
$$\delta = \sqrt{\frac{2\varkappa_0}{\omega}} \tag{3.38}$$

есть *классическая толщина скин-слоя* (п. 3.16). преобразуем решение (3.21) к виду

$$H_z(x, t) = H_0 e^{-x/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \\ - \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_0 \int_0^{\lambda_0} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\delta^2} \frac{1}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2} d\lambda. \tag{3.39}$$

Первый член является решением для установившихся колебаний.

3.15. На фиг. 3.4 графически изображено рассчитанное численным методом решение (3.39) для трех различных моментов



Фиг. 3.4. Диффузия магнитного поля переходного типа вида $H_z(x, t) = H_0 \sin \omega t$ (пунктирная линия) и сравнение со стационарным решением для трех различных моментов времени.

времени ($t/T = {}^1/_4$, ${}^1/_2$, 1) и для сравнения приведено соответствующее решение для установившихся колебаний. Качественное различие между этими двумя решениями заключается в том, что стационарное решение обладает бесконечным числом нулей, т. е. пересечений с осью x, в то время как для переходного режима они полностью отсутствуют для случаев $t/T = {}^1/_4$, ${}^1/_2$, а для $t/T = 1$ имеется только одна нулевая точка. Однако вследствие сильного затухания кривых на расстояниях, больших δ, количественное различие мало.

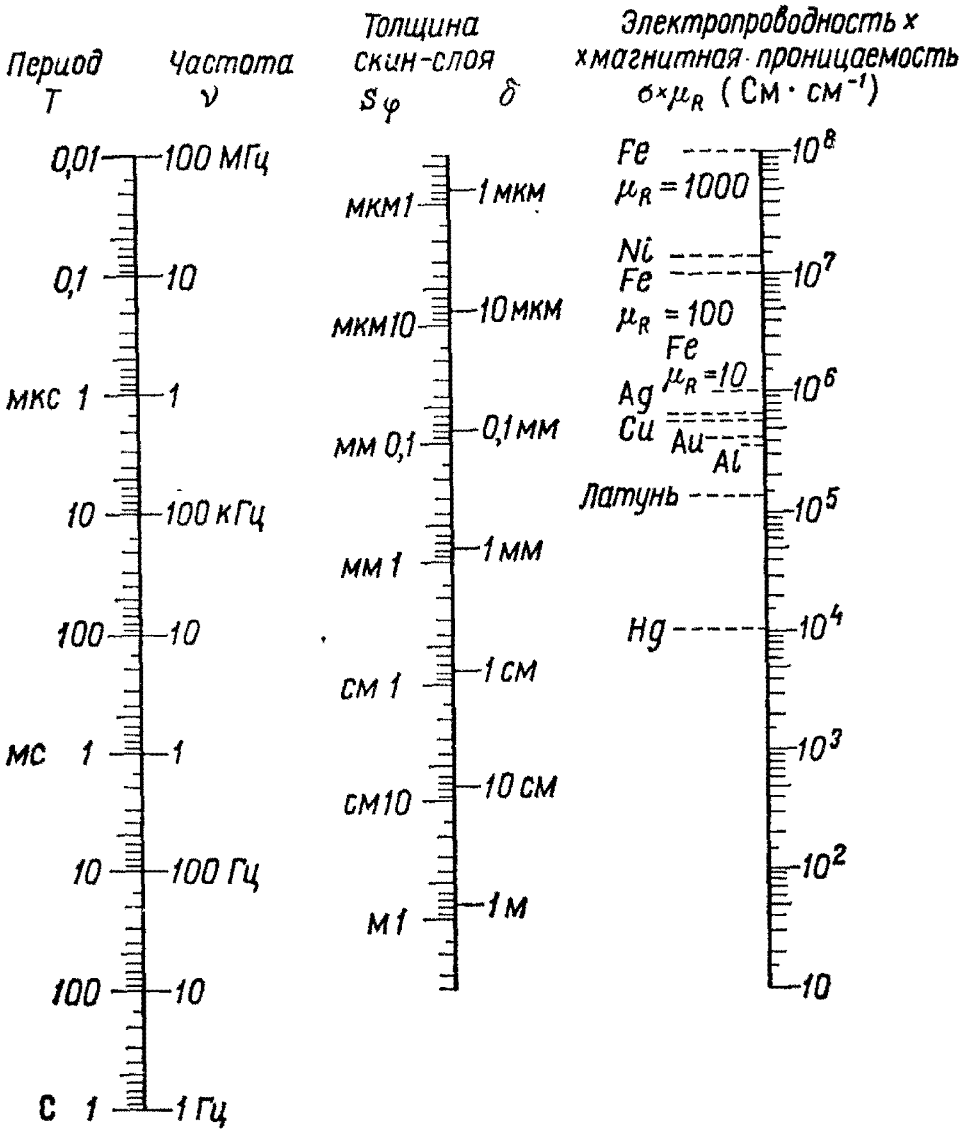
Для толщины скин-слоя магнитного потока (3.31) численный расчет в случае переходного режима при $t/T = {}^1/_4$, ${}^1/_2$, 1 дает

$$s_\varphi = 0{,}780\delta, \qquad 0{,}713\delta, \qquad 0{,}368\delta,$$

в то время как для тех же моментов времени в стационарном режиме ширина скин-слоя равна [см. уравнение (3.48)]

$$s_\varphi = \frac{1}{2}\delta.$$

Значение s_φ при максимуме поля $(t = {}^1/_4 T)$ дается номограммой фиг. 3.5.



Фиг. 3.5. Номограмма, позволяющая определить толщину скин-слоя для синусоидального поля, зная частоту и электропроводность.

s_φ — толщина скин-слоя магнитного потока в случае переходного режима для первой четверти периода $(t = {}^1/_4 T)$; δ — «классическая» толщина скин-слоя [уравнение (3.38)].

Электрическое поле на поверхности, согласно уравнению (3.22), равно

$$E_y(0,\,t) = \frac{j_y}{\sigma_0} = \mu H_0 \delta \frac{2\pi}{T} \int\limits_0^{t/T} \frac{\cos 2\pi\tau/T}{(t/T - \tau/T)^{1/2}}\, d\left(\frac{\tau}{T}\right). \qquad (3.40)$$

Граничное условие для установившегося режима при $H_z = H_0 \sin \omega t$

3.16. Первый член в (3.39), соответствующий граничному условию установившегося режима при синусоидальной форме поля

$$H_z(0, t) = H_0 \sin \omega t \quad \text{для} \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.41}$$

может быть также найден непосредственно из уравнения диффузии (3.15), если искать его решение в виде

$$H_z(x, t) = H(x) \sin(\omega t - \varphi).$$

В обоих случаях имеем

$$H_z(x, t) = H_0 e^{-x/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right). \tag{3.42}$$

Используя (3.13), найдем, что плотность тока, соответствующая этому полю, равна

$$j_y(x, t) = j_0 e^{-x/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{1}{4}\pi\right), \tag{3.43}$$

где

$$j_0 = \sqrt{2}\,\frac{H_0}{\delta} \tag{3.44}$$

и где классическая толщина скин-слоя δ определяется уравнением (3.38) и дается номограммой на фиг. 3.5.

Как для поля, так и для тока фазовый сдвиг и экспоненциальный спад амплитуды зависят только от x/δ. Заметим, что в рассматриваемом решении для установившегося режима ток опережает по фазе поле на $^1/_4 T$. Таким образом, когда внешнее поле равно нулю при $t = 0$, плотность тока на поверхности уже имеет конечное значение. Однако полный ток на *единицу длины* i_y должен обращаться в нуль при $t = 0$, так как, интегрируя уравнение (3.13) по прямоугольному контуру [одна сторона которого параллельна полю и находится снаружи проводника, а другая сторона проходит далеко в глубине проводника, где $H_z(x \to \infty, t) \to 0$], приходим к равенству

$$H_z(0, t) = -i_y(t). \tag{3.45}$$

Интегрируя же (3.43), получаем

$$i_y(t) = \int_0^\infty j_y(x, t)\, dx = \frac{j_0}{\sqrt{2}}\,\delta \sin \omega t, \tag{3.46}$$

т. е. ток обладает временно́й зависимостью (3.45).

3.17. Для *полного магнитного потока* на единицу ширины проводника ϕ, производя подобное же интегрирование, находим

$$\phi_z(t) = \mu \int_0^\infty H_z(x, t)\, dx = \frac{\mu H_0}{\sqrt{2}}\,\delta \sin\left(\omega t - \frac{1}{4}\pi\right). \tag{3.47}$$

Из этого выражения видно, что магнитный поток исчезает в тот момент, когда поле на поверхности еще не обратилось в нуль (мы пренебрегаем, как обычно, эффектами, обусловленными гистерезисом). Толщина скин-слоя магнитного потока s_φ, определяемая (3.31), теперь зависит от времени, что видно из уравнения (3.47) и равенства $\phi_z(t) = \mu s_\varphi H_0 \sin \omega t$. В первую четверть периода $(t + {}^1/_4 T)$ она равна

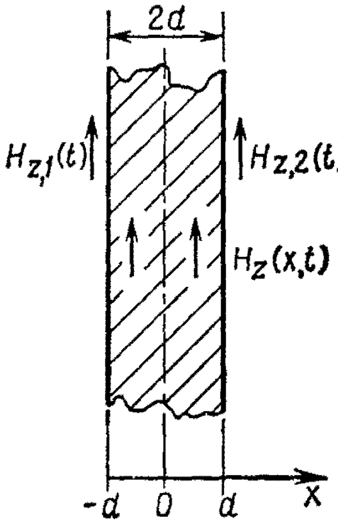
$$s_\varphi = \frac{1}{2}\delta. \tag{3.48}$$

Как уже было отмечено (см. п. 3.15 и фиг. 3.4), эта толщина скин-слоя не очень сильно отличается от значения, даваемого решением для случая переходного режима, хотя между ними и имеется качественное различие.

§ 3. ДИФФУЗИЯ В ПРОВОДНИК, ОГРАНИЧЕННЫЙ ПЛОСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Затухание магнитного поля, захваченного проводником

3.18. Из всех проводников, ограниченных более чем одной плоской поверхностью, простейшей геометрией обладает *плоская пластина*. Для этой задачи требуется на одно граничное условие



Фиг. 3.6. Проводник в виде плоской пластины толщиной $2d$.

больше по сравнению с задачей диффузии в полуплоскость, рассмотренной ранее (фиг. 3.6). Для самых различных рассматриваемых здесь задач мы, как и раньше, позаимствуем решения из теории теплопроводности (см. [3.1]). Например, ослабление магнитного поля внутри пластин при начальном условии

$$H_z(x, 0) = H_0 \quad \text{для} \quad -d < x < d \tag{3.49}$$

и граничных условиях

$$H_z(\pm d, t) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{3.50}$$

определяется выражением

$$H_z(x, t) = \frac{4}{\pi} H_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left\{-\frac{\varkappa_0 (2n+1)^2 \pi^2 t}{4d^2}\right\} \cos(2n+1)\frac{\pi x}{2d}. \tag{3.51}$$

Для достаточно больших времен можно оставить только член с $n=0$. Тогда для *характеристического времени затухания* имеем

$$\tau_0 = \frac{4d^2}{\pi^2 \varkappa_0}. \tag{3.52}$$

3.19. Заметим, что задача о затухании поля эквивалентна нестационарной задаче диффузии поля H_0 в плоскую пластину. Действительно, в последнем случае начальное и граничное условия

$$H_z(x, 0) = 0 \quad \text{для} \quad -d < x < d \tag{3.53}$$

и

$$H_z(\pm d, t) = H_0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{3.54}$$

могут быть преобразованы к форме задачи о затухании поля [уравнения (3.49), (3.50)] путем прибавления члена $-H_0$ к правой части и изменения знака. Аналогично из уравнения (3.51) следует решение задачи диффузии:

$$H_z(x, t) = H_0 - \frac{4}{\pi} H_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left\{-\frac{\varkappa_0 (2n+1)^2 \pi^2 t}{4d^2}\right\} \times \\ \times \cos(2n+1)\frac{\pi x}{2d}.$$

Пластина при синусоидальном поле на границе

3.20. Стационарное решение при граничных условиях

$$H_z(\pm d, t) = H_0 \sin \omega t \quad \text{для} \quad -\infty < t < \infty \tag{3.55}$$

может быть записано в виде

$$H_z(x, t) = \alpha H_0 \sin(\omega t - \varphi), \tag{3.56}$$

где

$$\alpha = \left(\frac{\operatorname{ch} 2x/\delta + \cos 2x/\delta}{\operatorname{ch} 2d/\delta + \cos 2d/\delta}\right)^{1/2} \tag{3.57}$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sh}\frac{d-x}{\delta}\sin\frac{d+x}{\delta}+\operatorname{sh}\frac{d+x}{\delta}\sin\frac{d-x}{\delta}}{\operatorname{ch}\frac{d-x}{\delta}\cos\frac{d+x}{\delta}+\operatorname{ch}\frac{d-x}{\delta}\cos\frac{d-x}{\delta}} \tag{3.58}$$

[δ — обычная толщина скин-слоя, определенная в (3.38)]. Действительно, как и для полупространства, решение для этого случая может быть непосредственно получено из диффузионного уравнения (3.15), если искать решение в виде

$$H_z(x, t) = H(x)\sin(\omega t - \varphi),$$

удовлетворяющем граничным условиям (3.55).

Пластина при экспоненциальном поле на границе

3.21. Граничные условия этой задачи, с которой мы столкнемся позднее, записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} H_z(-d, t) &= H_0 e^{t/\tau} \\ H_z(+d, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad -\infty < t < \infty. \tag{3.59}$$

Метод решения задачи подобен уже описанному в п. 3.13. Две константы A_1, A_2 общего решения определяются граничными условиями (3.59); окончательная форма решения имеет вид

$$H_z(x, t) = H_0\frac{e^{t/\tau}}{1-e^{-4d/x_0}}\left[e^{-(x+d)/x_0} - e^{(x-3d)/x_0}\right], \tag{3.60}$$

где x_0 дается уравнением (3.35).

Диффузия в прямоугольный стержень

3.22. Легко видеть, что общее решение *двумерного диффузионного уравнения*

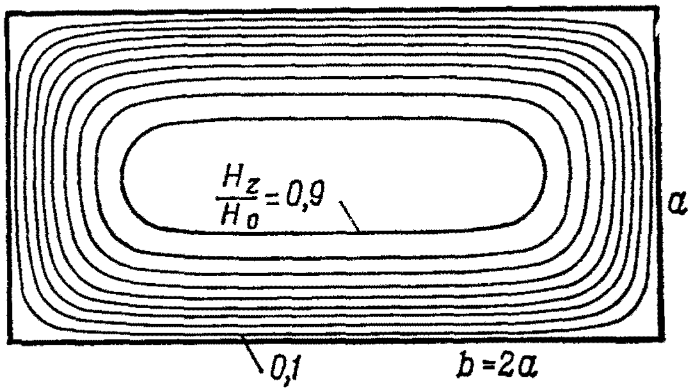
$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial^2 y} = \frac{1}{\varkappa_0}\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{3.61}$$

для бесконечно длинного проводника прямоугольного сечения может быть представлено в виде произведения

$$H_z(x, y, t) = H_{zx}(x, t)\, H_{zy}(y, t).$$

Здесь $H_{zx}(x, t)$, $H_{zy}(y, t)$ являются решениями одномерных диффузионных уравнений при соответствующих граничных и начальных условиях.

Например, если рассматривать затухание магнитного поля H_0 в *прямоугольном стержне* со сторонами $2a$ и $2a$, то каждое из двух одномерных решений H_{zx}, H_{zy} будет иметь форму (3.51).



Фиг. 3.7. Изомагнитные линии $H/H_0 = 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots,\ 0{,}9$ в случае прямоугольного проводника со сторонами $2a$ и a для момента времени $\varkappa_0 t^2/(a^2 + 4a^2) = 0{,}08$, т. е. для времени спада начального поля H_0 (из [3.1]).

Если ограничиться только членами с $n = 0$, то общее решение упрощается и приобретает вид

$$H_z(x, y, t) \approx \frac{16}{\pi^2} H_0 \exp\left\{-\frac{1}{4}\pi^2\varkappa_0 t\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right\} \cos\frac{\pi x}{2a} \cos\frac{\pi x}{2b}. \tag{3.62}$$

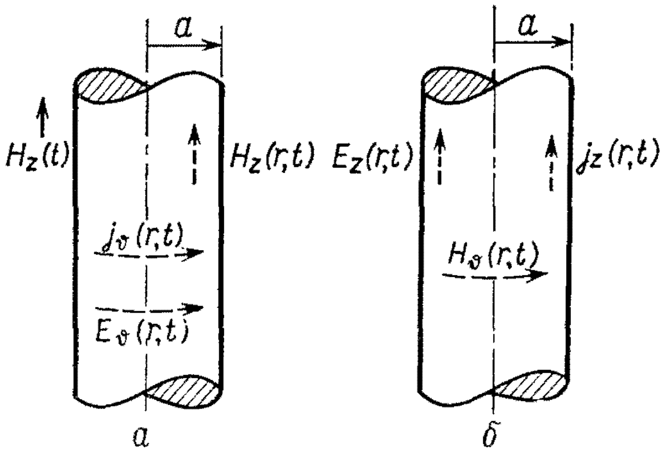
Характеристическое время затухания в этом случае равно

$$\tau_0 = \frac{4}{\pi^2 (1/a^2 + 1/b^2)\,\varkappa_0}. \tag{3.63}$$

На фиг. 3.7 изображены для прямоугольного проводника линии равного значения H, соответствующие случаям $H_z(x, y, t)/H_0 = 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots,\ 0{,}9$ для момента времени $\varkappa_0 t/(a^2 + b^2) = 0{,}08$.

4. ДИФФУЗИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПРОВОДНИК

3.23. Диффузия магнитных полей в *цилиндрические проводники* представляет собой процесс, часто встречающийся на практике, например при передаче токов высокой частоты (фиг. 3.8). Вследствие цилиндрической геометрии точные аналитические решения обычно имеют громоздкий вид, как, например, решение для полого цилиндрического проводника в аксиальном магнитном поле. Однако в некоторых случаях можно найти приемлемые приближенные решения. Так, если толщина скин-слоя намного меньше радиуса цилиндра, задача сводится к плоскому случаю и можно воспользоваться решениями, данными в предыдущих разделах. Для



Фиг. 3.8. Две основные цилиндрические конфигурации полей в задачах диффузии.

решения общей задачи удобнее всего пользоваться *цилиндрическими координатами* (z, r, ϑ), в которых уравнения (2.1) и (2.2) имеют простую форму (см. п. П2.4).

Одномерные уравнения

3.24. Если пренебречь членами, определяемыми током смещения (п. 2.2), и положить, что поле не зависит от z, ϑ и $H_r \equiv 0$ (фиг. 3.8), то система уравнений (2.1) и (2.2) сводится к

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma_0 E_\vartheta, \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial (r H_\vartheta)}{r\, \partial r} = \sigma_0 E_z \tag{3.65}$$

и

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \mu \frac{\partial H_\vartheta}{\partial t}, \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial (r E_\vartheta)}{r\, \partial r} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{3.67}$$

Для аксиальных магнитных полей H_z ($H_\vartheta \equiv 0$), которым соответствуют азимутальные токи j_ϑ (фиг. 3.8, *а*), остаются только два уравнения (3.64) и (3.67), из которых легко получить *цилиндрическое уравнение диффузии*

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa_0}\frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{3.68}$$

где $\varkappa_0$ — коэффициент диффузии магнитного поля, определяемый уравнением (3.6) или (3.7).

3.25. Для азимутальных магнитных полей H_ϑ ($H_z \equiv 0$) и аксиальных токов j_z (фиг. 3.8, *б*) из уравнений (3.65), (3.66) находим уравнение

$$\frac{\partial^2 H_\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_\vartheta}{\partial r}-\frac{H_\vartheta}{r^2}=\frac{1}{\varkappa_0}\frac{\partial H_\vartheta}{\partial t}, \tag{3.69}$$

которое отличается по форме от (3.68). Однако для плотности тока

$$j_z=\frac{\partial (rH_\vartheta)}{r\,\partial r} \tag{3.70}$$

уравнение (3.69) приводит к обычному уравнению диффузии (3.68)

$$\frac{\partial^2 j_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial j_z}{\partial r}=\frac{1}{\varkappa_0}\frac{\partial j_z}{\partial t}. \tag{3.71}$$

Поэтому при такой геометрии поля (соответствующей случаю передачи токов высокой частоты) удобно в качестве независимой переменной использовать плотность тока j_z, а магнитное поле вычислять с помощью уравнения (3.70). Среди имеющихся решений особого внимания заслуживают расчеты, определяющие изменение полного внутреннего сопротивления линии за счет токового скин-эффекта (3.5).

Диффузия нестационарного поля в проводящий стержень

3.26. Рассмотрим диффузию аксиального магнитного поля (фиг. 3.8, *а*), приложенного к внешней поверхности проводящего цилиндра радиусом a, при следующих граничном и начальном условиях:

$$H_z(a, t)=H_z(t) \quad \text{для} \quad 0\leqslant t<\infty, \tag{3.72}$$

$$H_z(r, 0)=0 \quad \text{для} \quad 0\leqslant r<a. \tag{3.73}$$

Общее решение диффузионного уравнения (3.68) известно из теории тепловой диффузии ([3.1], стр. 201) и может быть записано в виде

$$H_z(r, t)=\frac{2\varkappa_0}{a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa_0\alpha_n^2 t}\frac{\alpha_n J_0(r\alpha_n)}{J_1(a\alpha_n)}\int_0^t e^{\varkappa_0\alpha_n^2\lambda}H_0(\lambda)\,d\lambda, \tag{3.74}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$J_0(a\alpha)=0, \tag{3.75}$$

$\varkappa_0$ определяется уравнением (3.6), а J_0, J_1 — функции Бесселя первого рода порядка $n = 0, 1$ (см. [3.8]). Значения первых пяти корней уравнения (3.75) и соответствующие значения J_1 даны в табл. 3.I. Решения для конкретных граничных условий могут быть получены с помощью выражения (3.74); точные решения приводятся в литературе, как, например, для случаев $H_z = H_0(t/t_0)$, $H_z = H_0 \sin(\omega t + \varepsilon)$ (нестационарный случай), $H_z = H_0(1 - \exp(-\beta t))$ решения приведены в работе [3.1].

ТАБЛИЦА 3.1

Значения первых пяти корней уравнения $J_0(b\alpha_n)=0$

Порядок n	Корни $b\alpha_n$	$J_1(b\alpha_n)$
1	2,405	+0,519
2	5,520	—0,340
3	8,654	+0,272
4	11,79	—0,233
5	14,93	+0,207

Затухание поля внутри проводящего стержня

3.27. Затухание первоначально постоянного аксиального магнитного поля внутри цилиндрического стержня определяется граничным и начальным условиями

$$\begin{aligned} H_z(a, t) &= 0 \quad &\text{для}\quad 0 \leqslant t < \infty, \\ H_z(r, 0) &= H_0\,(\mathrm{const}) \quad &\text{для}\quad 0 \leqslant r < a. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Используя соотношение ([3.2], стр. 586)

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\alpha_n)}{a\alpha_n J_1(a\alpha_n)} \equiv 1, \tag{3.77}$$

из уравнения (3.74) найдем решение, соответствующее диффузии в стержне в случае переходного режима. Применяя схему, рассмотренную в пп. 3.18 и 3.19, получаем решение нашей задачи, определяемой условиями (3.76):

$$H_z(r, t) = 2H_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa_0\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{a\alpha_n J_1(a\alpha_n)}. \tag{3.78}$$

3.28. Для магнитного потока ϕ_z, остающегося в стержне по истечении времени t, имеем

$$\frac{1}{\mu}\,\phi_z(t) = 2\pi \int_0^a H_z(r, t)\, r\, dr = 4\pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} e^{-\varkappa_0\alpha_n^2 t}. \tag{3.79}$$

Это выражение получается почленным интегрированием сходящегося ряда (3.78) и использованием интегрального соотношения для функций Бесселя

$$x^m J_m = \int_0^x x^m J_{m-1}(x)\, dx \qquad \text{с } m = 1 \text{ (см. [3.8])}.$$

При достаточно больших временах, т. е. при $t \gg \tau_1$, где $\tau_1 = 1/\alpha_1^2\varkappa_0 = 0{,}174a^2/\varkappa_0$, выражения (3.78) и (3.79) существенно упрощаются, так как в этом случае можно пренебречь всеми членами, кроме первого. Так, например, в катушке с N витками, намотанной на стержне, будет индуцироваться напряжение

$$\frac{1}{\mu} U_i = -\frac{N}{\mu}\frac{d\Phi_z}{dt} \approx 4\pi\varkappa_0 N H_0 e^{-t/\tau_1}, \tag{3.80}$$

длительность существования которого определяется временем затухания. Метод, основанный на использовании соотношения (3.80), может быть применен для измерения электропроводности металлических образцов [3.6].

Стационарное решение для случая $H_z = H_0 \cos \omega t$

3.29. Решение в токовой форме диффузионной задачи при наличии стационарного поля на границе

$$H_z(a,\ t) = H_0 \cos \omega t \text{ для } -\infty < t < \infty \tag{3.81}$$

широко представлено в существующей литературе (за переменную принимается j_z [2.2, 3.7]). Это решение может быть использовано для задачи аксиального магнитного поля при тех же самых граничных и начальных условиях. Поэтому кратко рассмотрим его.

Если искать решение в виде

$$\overline{H}_z(r,\ t) = H_0 \overline{h}(\overline{R})\, e^{i\omega t} \tag{3.82}$$

(где чертой обозначены комплексные функции, i — мнимая единица), то диффузионное уравнение сводится к

$$\frac{d^2\overline{h}}{d\overline{R}^2} + \frac{1}{\overline{R}}\frac{d\overline{h}}{d\overline{R}} - \overline{h} = 0, \tag{3.83}$$

где

$$\overline{R} = \sqrt{2i}\, r \sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa_0}} = \sqrt{2i}\,\frac{r}{\delta}, \tag{3.84}$$

δ — обычная толщина скин-слоя (3.38). Уравнение (3.83) решается с помощью модифицированной функции Бесселя первого и второго рода и нулевого порядка (I_0, K_0; см. [3.8]), и общее решение записывается в виде

$$\overline{h}(\overline{R}) = C I_0(\overline{R}) + D K_0(\overline{R}), \tag{3.85}$$

где постоянные C, D определяются граничными условиями данной задачи.

3.30. Для твердого цилиндрического проводника $D \equiv 0$, так как H_z имеет конечное значение для $r = 0$ и, следовательно, $K_0(0) = \infty$; с другой стороны, постоянная C определяется граничным условием (3.81). Оставляя только вещественную часть в уравнении (3.82), находим решение [2.2]

$$H_z(r, t) = H_0 h(R) \cos[\omega t + \alpha(R)], \tag{3.87}$$

где

$$h(R) = \left\{\frac{\mathrm{ber}^2 R + \mathrm{bei}^2 R}{\mathrm{ber}^2 R_a + \mathrm{bei}^2 R_a}\right\}^{1/2}, \tag{3.88}$$

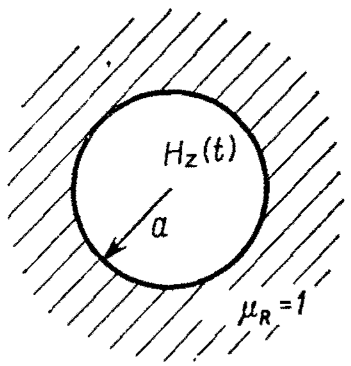
$$\mathrm{tg}[\alpha(R)] = \frac{\mathrm{ber}\, R_a \cdot \mathrm{bei}\, R - \mathrm{ber}\, R \cdot \mathrm{bei}\, R_a}{\mathrm{ber}\, R_a \cdot \mathrm{ber}\, R + \mathrm{bei}\, R_a \cdot \mathrm{bei}\, R} \tag{3.89}$$

и

$$R = \sqrt{2}\,\frac{r}{\delta}, \qquad R_a = \sqrt{2}\,\frac{a}{\delta}. \tag{3.90}$$

Известные ber- и bei-функции протабулированы в [3.8].

3.31. Другой задачей, с которой мы встретимся позднее, является случай бесконечной проводящей среды с внутренней цилиндрической полостью радиусом $r = a$ при том же граничном



Ф и г. 3.9. Цилиндрическая дыра в бесконечном проводнике.

условии (3.81) (фиг. 3.9). В общем решении задачи (3.85) теперь уже постоянная $C \equiv 0$, так как $I_0(\infty) = \infty$. Решение задачи может быть получено из предыдущего заменой функций ber и bei соответственно на ker и kei [3.8]. Вместо уравнений (3.88), (3.89) получим

$$h(R) = \left\{\frac{\mathrm{ker}^2 R + \mathrm{kei}^2 R}{\mathrm{ker}^2 R_a + \mathrm{kei}^2 R_a}\right\}^{1/2} \tag{3.91}$$

и

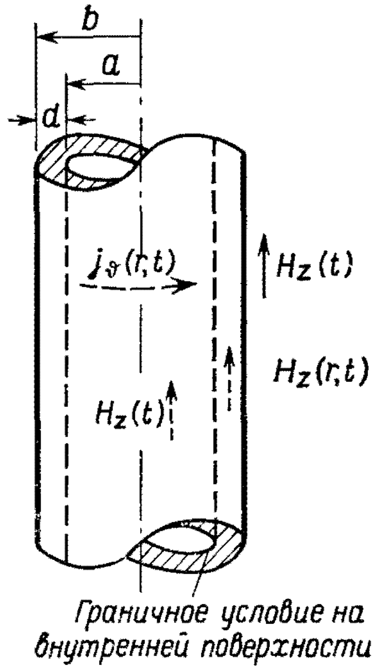
$$\mathrm{tg}[\alpha(R)] = \frac{\mathrm{ker}\, R_a \cdot \mathrm{kei}\, R - \mathrm{ker}\, R \cdot \mathrm{kei}\, R_a}{\mathrm{ker}\, R_a \cdot \mathrm{ker}\, R + \mathrm{kei}\, R_a \cdot \mathrm{kei}\, R}. \tag{3.92}$$

3.32. Эти результаты будут обсуждены в гл. 4. Можно предполагать, что, например, поверхностная плотность тока для цилиндрического проводника меньше, чем в плоском случае (см. п. 4.17). Действительно, благодаря цилиндрической геометрии токовые нити стремятся глубже проникнуть в цилиндр, так как они становятся короче и, следовательно, «менее резистивны». В результате толщина токового скин-слоя увеличивается по сравнению с плоским случаем. И наоборот, для цилиндрического отверстия ток будет концентрироваться ближе к поверхности.

§ 5. ПРОВОДЯЩИЙ ПОЛЫЙ ЦИЛИНДР И ДИФФУЗИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Граничное условие на внутренней поверхности

3.33. В случае *полого цилиндрического проводника* с наружным радиусом b и внутренним радиусом a (фиг. 3.10) решение диффузионной задачи требует в дополнение к (3.72) *граничного условия*



Фиг. 3.10. Полый проводник.

на внутренней поверхности. Чтобы получить это условие, применим закон *индукции Фарадея* к внутренней поверхности бесконечного проводника, на которой $\mu = \mu_0$ и аксиальная составляющая магнитного поля H_z везде имеет одно и то же значение

$$-A\mu_0 \frac{dH_z(a,\ t)}{dt} = \oint\limits_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}; \qquad (3.93)$$

здесь C представляет собой кривую пересечения внутренней поверхности и плоскости, перпендикулярной оси проводника, A — площадь, ограниченная этой кривой. Для внутренней поверхности проводника имеем $\nabla \times \mathbf{H} = \sigma_0 \mathbf{E}$; учитывая пространственную непрерывность тангенциальной составляющей **E**, окончательно находим граничное условие в виде

$$\frac{dH_z(a,\ t)}{dt}=\frac{1}{A\sigma_0\mu_0}\oint\limits_C [\nabla\times H]\cdot d\mathbf{l}. \qquad (3.94)$$

Для круглого цилиндра с внутренним радиусом $r=a$ (фиг. 3.10) получаем

$$\frac{dH_z(a,\ t)}{dt}=2\frac{\varkappa_1}{a}\left[\frac{\partial H_z(r,\ t)}{\partial r}\right]_{r=a}, \qquad (3.95)$$

где по аналогии с уравнениями (3.6), (3.7) для $\mu_R=1$ мы ввели *коэффициент диффузии*

$$\varkappa_1=\frac{1}{\sigma_0\mu_0}, \qquad (3.96)$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$\varkappa_1=\frac{10^9}{4\pi\sigma_0}. \qquad (3.97)^*$$

Это граничное условие можно также найти в теории теплопроводности (см. п. 3.39).

3.34. В аналогичной задаче j_z-проводимости граничное условие для j_z отличается от условия для H_z, поэтому решения H_z и j_z для полого проводника неодинаковы. Используя уравнения (3.1), (3.66) и учитывая, что во внутренней полости магнитное поле отсутствует, получаем условие

$$\left(\frac{dj_z}{dr}\right)_{r=a}=0.$$

Диффузия в полый проводник

3.35. Общее решение задачи магнитной диффузии является очень громоздким. Оно содержит в явном виде μ (а не только $\varkappa_0$), что можно было бы заранее предвидеть, зная экранирующие свойства проводников из ферромагнетиков (см. [2.3], стр. 164). Аналитические решения при различных нестационарных условиях даны Джегером [3.9]; диффузия в полом проводнике при неизменном синусоидальном внешнем поле детально рассмотрена как задача экранирования в [3.10, 2.2, 3.7]. К счастью, для большинства практических задач можно использовать значительно более простые решения, предполагая, что толщина стенки $d = b - a$ мала по сравнению с толщиной скин-слоя. Эту задачу мы обсудим в гл. 4 с учетом изменения электропроводности вследствие нагрева проводника.

3.36. В качестве примера рассмотрим задачу диффузии для полого проводящего цилиндра ($b > r > a$) при следующих граничном (для наружной поверхности) и начальном условиях:

$$H_z(b,\ t) = H_0\,(\text{const}) \text{ для } 0 \leqslant t < \infty, \tag{3.98}$$

$$H_z(r,\ 0) = 0 \text{ для } 0 \leqslant r < b. \tag{3.99}$$

Поле $H_z(t) = H_z(a,\ t)$ в полости проводника для $\mu_R = 1$ может быть записано в виде [3.9]

$$H_z(t) = H_0 - 4H_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa_1 \alpha_n^2 t} \times \\ \times \frac{J_2(a\alpha_n)\,J_0(b\alpha_n)}{(a\alpha_n)^2\,[J_0^2(b\alpha_n) - J_2^2(a\alpha_n)]}, \tag{3.100}$$

где α_n — корни уравнения

$$J_0(b\alpha)\,Y_2(a\alpha) - Y_0(b\alpha)\,J_2(a\alpha) = 0; \tag{3.101}$$

$\varkappa_1$ определяется уравнением (3.96) или (3.97); J, Y — функции Бесселя первого и второго рода и порядка $n = 0,\ 2$ (см. [3.8]). Первый корень α_1 уравнения (3.101) может быть найден из уравнения (3.103) и табл. 3.II в виде функции отношения a/b. Это решение будет обсуждаться в п. 3.37 в связи с рассмотрением задачи о затухании поля.

ТАБЛИЦА 3.II

Значения g для полого проводника

	g	a/b	g
0,00	2,173	0,60	1,720
0,05	2,73	0,65	1,587
0,10	2,172	0,70	1,431
0,15	2,170	0,75	1,253
0,20	2,164	0,80	1,052
0,25	2,153	0,85	0,8267
0,30	2,133	0,90	0,5766
0,35	2,102	0,95	0,3011
0,40	2,059	0,96	0,2430
0,45	2,001	0,97	0,1838
0,50	1,926	0,98	0,1236
0,55	1,833	0,99	0,0623
		1,00	0

Затухание поля, находящегося внутри полого цилиндра

3.37. Задача о затухании аксиального магнитного поля, находящегося внутри полого круглого проводника (у которого $\mu = \mu_0$), является дополнительной по отношению к задаче о диффузии нестационарного внешнего поля (аналогично изложенному в пп. 3.18, 3.19, 3.26, 3.27). Поэтому решение может быть получено непосредственно из уравнения (3.100) обычным способом (как в пп. 3.18 и 3.19). Для достаточно большого времени $t \gg 1/\varkappa_1\alpha_1^2$ можно ограничиться только первым членом ($n = 1$). Тогда затухание поля будет определяться выражением

$$H_z(a,t) \approx H_0 e^{\ t/\tau_1} \tag{3.102}$$

и *время затухания* равно

$$\tau_1 = \frac{1}{\varkappa_1\alpha_1^2} = \frac{b^2}{4\pi\varkappa_1}\, g; \tag{3.103}$$

здесь

$$g = \frac{4\pi}{(b\alpha_1)^2} \tag{3.104}$$

есть геометрический *формфактор*, который был расчитан в виде функции (a/b) Вайнштейном [3.11] и приведен в табл. 3.II. В предельном случае тонкого проводника, используя соотношение п. 4.29, находим

$$\tau_1 = \frac{(b+a)(b-a)}{4\varkappa_1}. \tag{3.105}$$

3.38. При постоянной магнитной проницаемости $\mu_R > 1$ ([3.1, 3.12]) решение задачи усложняется, но временнáя зависимость (экспоненциальная) остается примерно той же с характеристическим временем

$$\tau_1^* = \frac{1}{\varkappa_0\alpha_1^{*2}}, \tag{3.106}$$

где $\varkappa_0$ — коэффициент диффузии, определенный в (3.6), а α_1^* — первый корень обобщенного уравнения (3.101). В [3.12] приведена эмпирическая формула, справедливая в диапазоне $1 < b/a \leqslant 1{,}5$:

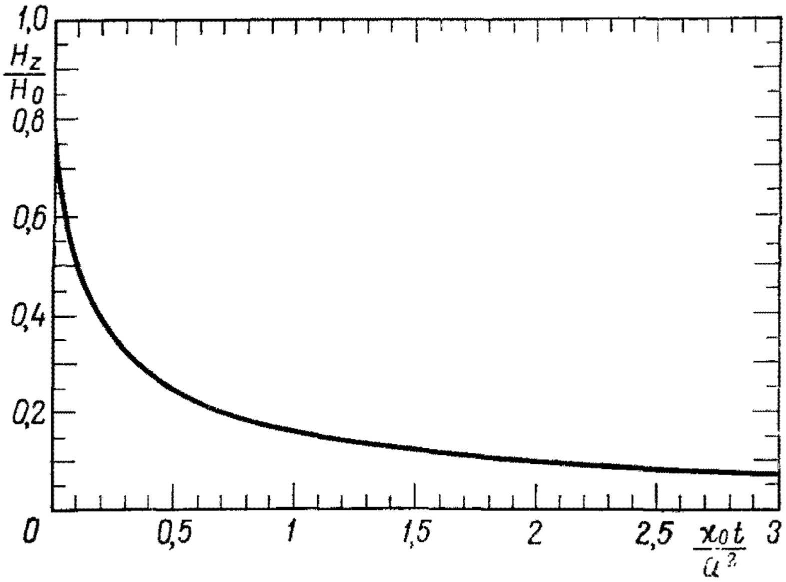
$$\alpha_1^* \approx \frac{\sqrt{3}}{b-a}\,\frac{\mu_R-1}{\mu_R} + \frac{\sqrt{2}}{\mu_R\sqrt{\{a(b-a)\}}}.$$

Для $\mu_R = 1$ и $b/a \approx 1$ выражение для времени затухания сводится к (3.105); для $\mu_R \gg 1$ справедливо приближенное выражение

$$\tau_1^* \approx \frac{(b-a)^2}{3\varkappa_0}. \tag{3.107}$$

Затухание поля, находящегося внутри бесконечно толстого полого цилиндра

3.39. Задача диффузии магнитного поля H_0 ($t = 0$), находящегося внутри бесконечно толстого $b \to \infty$ и очень длинного полого цилиндра с внутренним радиусом $r = a$ при граничном



Фиг. 3.11. Затухание магнитного поля H_0, заключенного во внутренней цилиндрической полости проводника радиусом a [уравнение (3.108)].

условии (3.95), аналогична по форме одной из задач термодиффузии. В этой задаче предполагается, что отверстие заполнено жидкостью с бесконечной теплопроводностью, а теплоемкость одинакова для внутренней и наружной сред. Используя решение этой задачи термодиффузии ([3.1], стр. 342), можно составить выражение, описывающее затухание магнитного поля внутри полого проводника

$$H_z(t) = \frac{8}{\pi^2} H_0 \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-(\lambda^2/a^2)\varkappa_0 t\}}{\lambda^3 [J_{\frac{1}{2}}^2(\lambda) + y_{\frac{1}{2}}^2(\lambda)]} d\lambda, \tag{3.108}$$

где величина $\varkappa_0$ определена в (3.6). На фиг. 3.11 поле $H_z(t)$ изображено в виде функции $\varkappa_0 t/a^2$.

Четвертая глава Рассеяние энергии и нелинейная диффузия в системах с импульсными магнитными полями

§ 1. НАГРЕВ ПРОВОДНИКА В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

4.1. Диффузия магнитного поля в несжимаемый проводник сопровождается «втеканием» в него энергии, которая затем проявляется в виде магнитной энергии, связанной с продиффундировавшим полем (и характеризуемой плотностью $^1/_2\mu H^2$), и энергии джоулева нагрева за счет вихревых токов [1]). При учете процесса нагрева проводника теория диффузии существенно усложняется, так как в результате роста температуры проводника изменяется его электропроводность, что в свою очередь влияет на диффузию магнитного поля.

Изучение процесса рассеяния энергии начнем с анализа теории диффузии при постоянной электропроводности, рассмотренной в предыдущей главе, и уже затем обсудим более общую теорию диффузии, учитывающую температурные эффекты.

Закон Джоуля

4.2. Возрастание плотности внутренней (тепловой) энергии Q в проводнике, по которому протекает ток плотностью j, описывается уравнением

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{j^2}{\sigma} + \lambda\Delta\theta, \tag{4.1}$$

где λ — *удельная теплопроводность*, σ — *электропроводность*, $\theta\ (x,\ t)$ — *температура* проводника, задаваемая здесь, как правило, в градусах Цельсия. Первый член правой части уравнения (4.1) описывает источник тепла, которое вызывается джоулевым нагревом (2.64); второй член характеризует вклад теплопроводности

[1]) Распределение энергии в сжимаемых проводниках приведено в п. П4. 3.

в процесс изменения внутренней энергии проводника. Для твердого проводника (т. е. при температурах ниже точки плавления) обычно можно полагать, что с достаточно высокой точностью (без учета фазовых превращений, энергии сжатия и т. д.) выполняется соотношение

$$Q = c_v\theta, \tag{4.2}$$

причем удельная *теплоемкость* c_v (теплоемкость на единицу объема) остается примерно постоянной в диапазоне температур от 0 °С до точки плавления (см. п. 10.8). В течение процесса плавления температура вещества остается постоянной, но величина Q за счет теплоты плавления возрастает, так что в уравнение (4.2) следует внести поправку.

В первой части этой главы (вплоть до п. 4.18) вместо величины Q [(уравнение (4.2)] мы будем использовать температуру (при упомянутых выше ограничениях). Для простоты расчетов мы не будем учитывать в формулах первоначальные значения энергии и температуры, так что Q и θ в действительности будут представлять собой приращение плотности энергии и температуры, а не их абсолютные значения.

4.3. В задачах диффузии магнитного поля обычно можно пренебречь членом $\lambda\Delta\theta$, определяемым теплопроводностью. Для примера сравним обычную толщину электрического скин-слоя $\delta_{эл}$ для граничного поля, колеблющегося с угловой частотой ω, с соответствующей этому случаю *толщиной термического скин-слоя*

$$\delta_{терм} = \sqrt{\frac{2\lambda}{c_v\omega}}; \tag{4.3}$$

это выражение непосредственно вытекает из сравнения уравнений (3.5) и (3.9) при использовании подстановки (3.10). Как видно

ТАБЛИЦА 4.I

Соотношение между толщинами электрического и термического скин-слоя при 0 °С

Металл	Теплопроводность [1]) Дж·(м·с·град)$^{-1}$	$\delta_{эл}/\delta_{терм}$
Cu	400	10
Al	240	15
Fe ($\mu_R = 1$)	80	55
Нержавеющая сталь	14	350
Латунь	120	38
Бериллиевая медь (2%)	80	55

1) Данные из [3.5], остальные — из табл. 10.IV.

из табл. 4.I, отношение

$$\frac{\delta_{\text{эл}}}{\delta_{\text{терм}}}=\sqrt{\frac{c_v}{\sigma_0\mu\lambda}}$$

больше десяти для большинства металлов. Это означает, что в задачах диффузии магнитного поля теплопроводность играет ограниченную роль (в п. 4.10 рассмотрен случай, когда теплопроводность оказывает существенное влияние).

4.4. Поэтому уравнение (4.1) для одномерной задачи может быть сведено к выражению

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t}=\frac{j_y^2}{\sigma}, \tag{4.4}$$

или, в практической системе электрических единиц (см, эрг, А, мо),

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t}=10^7\frac{j_y^2}{\sigma}. \tag{4.5*}$$

Используя уравнение Максвелла (3.13)

$$j_y=-\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{4.6}$$

и уравнение (4.2), из (4.4) получаем

$$\frac{\partial [c_v\theta(x, t)]}{\partial t}=\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\partial H_z(x, t)}{\partial x}\right]^2, \tag{4.7}$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$\frac{\partial [c_v\theta(x, t)]}{\partial t}=\frac{10^9}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial H_z(x, t)}{\partial x}\right]^2. \tag{4.8*}$$

При постоянной электропроводности $\sigma=\sigma_0$ уравнение (4.7) может быть записано в следующей интегральной форме:

$$c_v\theta(x, t)=\frac{1}{\sigma_0}\int_0^t\left[\frac{\partial H_z}{\partial x}\right]^2 dt. \tag{4.9}$$

Уравнения энергии

4.5. Распределение электромагнитной энергии внутри проводника как результат магнитной диффузии описывается общим уравнением энергии (2.67), которое было выведено из уравнений Максвелла. Для проводящего полупространства с граничными условиями, показанными на фиг. 3.1, можно в уравнении (2.67) опустить знак поверхностного интеграла и рассматривать поверхность единичной площади. Тогда *полная энергия на единицу* *поверхности* W_T, которая «втекает» внутрь проводника за промежуток времени $(0,\ t)$, может быть записана в виде

$$W_T(t)=\int_0^t E_y H_z\,dt=-\frac{1}{\sigma_0}\int_0^t\left[\frac{\partial H_z(x,\ t)}{\partial x}\right]_{x=0} H_z(0,\ t)\,dt; \tag{4.12}$$

здесь использовано равенство

$$E_y=-\frac{1}{\sigma_0}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \tag{4.13}$$

вытекающее из (4.6) и закона Ома (3.1). Из уравнения баланса энергии (2.67) следует

$$W_T=W_R+W_M, \tag{4.14}$$

где W_R — энергия, определяемая омическим нагревом [уравнение (4.9)]:

$$W_R(t)=\int_0^\infty c_v\theta(x,\ t)\,dx=\frac{1}{\sigma_0}\int_0^\infty dx\int_0^t\left[\frac{\partial H_z(x,\ t)}{\partial x}\right]^2 dt, \tag{4.15}$$

и W_M — энергия магнитного поля

$$W_M(t)=\frac{1}{2}\mu\int_0^\infty[H_z(x,\ t)]^2\,dx. \tag{4.16}$$

Как обычно, будем считать магнитную проницаемость $\mu=\mu_0\mu_R$ постоянной величиной для данного вещества. Коэффициент магнитной диффузии, как и в уравнениях (3.6), (3.7), определяется

$$\varkappa_0=\frac{1}{\sigma_0\mu}, \tag{4.17}$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$\varkappa_0=\frac{10^9}{4\pi\sigma_0\mu_R}. \tag{4.18}*$$

§ 2. СЛУЧАЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУСФЕРЫ

Граничное условие, заданное в виде полиномиальной функции

4.6. Рассчитаем температуру и рассеиваемую энергию при условии постоянной электропроводности для двух наиболее типичных случаев из рассмотренных в гл. 3; решения для многих других случаев сведены в табл. 4.II. Чтобы продемонстрировать метод расчета, подробно рассмотрим задачу, граничное условие которой задано в виде полинома.

ТАБЛИЦА 4.II

Потери энергии и магнитного потока для случая плоского проводника с постоянной электропроводностью $[\varkappa_0 = 1/\sigma_0\mu]$

Поле на границе	Временной интервал	Толщина скин-слоя магнитного потока [см. (3.31)] s_φ	Толщина скин-слоя энергии [см. (4.39)] s_e/μ_R	Омическое рассеяние W_R/W_T	Магнитное рассеяние W_M/W_T	Коэффициент поверхности энергии [см. (4.38)] ϑ/μ_R
Переходный режим $(0 \leqslant t < \infty)$						
H_0	$(0,\ t)$	$1{,}128\ \sqrt{\varkappa_0 t}$	$2{,}0001\ s_\varphi$	0,707	0,293	∞
$H_0\ (t/t_0)^{1/2}$	$(0,\ t)$	$0{,}887\ \sqrt{\varkappa_0 t}$	$1{,}333\ s_\varphi$	0,586	0,414	1,571
$H_0\ (t/t_0)$	$(0,\ t)$	$0{,}752\ \sqrt{\varkappa_0 t}$	$1{,}200\ s_\varphi$	0,552	0,448	1,273
$H_0\ (t/t_0)^2$	$(0,\ t)$	$0{,}602\ \sqrt{\varkappa_0 t}$	$1{,}111\ s_\varphi$	0,529	0,471	1,132
$H_0\ (t/t_0)^5$	$(0,\ t)$	$0{,}417\ \sqrt{\varkappa_0 t}$	$1{,}048\ s_\varphi$	0,512	0,488	1,051
$H_0 \sin(2\pi/T)\,t$ $[\delta = (\varkappa_0 T/\pi)^{1/2}]$	$\left(0, \frac{1}{4}T\right)$	$0{,}78\ \delta = 0{,}88\sqrt{\varkappa_0 \cdot \frac{1}{4}T}$	$1{,}08\ \delta = 1{,}39\ s_\varphi$	0,593	0,407	1,63
	$\left(0, \frac{1}{2}T\right)$	$0{,}71\ \delta = 0{,}57\sqrt{\varkappa_0 \cdot \frac{1}{2}T}$	$1{,}27\ \delta = 1{,}94\ s_\varphi$	0,850	0,150	2,18
	$(0,\ T)$	$0{,}369\ \delta = 0{,}208\sqrt{\varkappa_0 \cdot T}$	$2{,}88\ \delta = 7{,}82\ s_\varphi$	0,962	0,038	5,51
Стационарный режим $-\infty < t < \infty)$ $H_0 \sin(2\pi/T)\,t$	$\left(0, \frac{1}{4}T\right)$	$0{,}5\,\delta = 0{,}564\sqrt{\left(\varkappa_0 \cdot \frac{1}{4}T\right)}$	$1{,}28\ \delta = 2{,}57\ s_\varphi$	0,806	0,292	2,57
	$\left(0, \frac{1}{2}T\right)$	$0{,}5\,\delta = 0{,}400\sqrt{\left(\varkappa_0 \cdot \frac{1}{2}T\right)}$	$1{,}57\ \delta = 3{,}14\ s_\varphi$	1	0,080	3,14
	$(0,\ T)$	$0{,}5\,\delta = 0{,}282\sqrt{(\varkappa_0 \cdot T)}$	$3{,}14\ \delta = 6{,}28\ s_\varphi$	1	0,040	6,28
$H_0 e^{t/\tau}$	$(-\infty,\ t)$	$\sqrt{\varkappa_0 \tau}$	s_φ	0,5	0,5	1

Общее решение задачи диффузии при граничном условии

$$H_z(0, t; n) = H_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2n} \quad \text{для } 0 \leqslant t < \infty \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.19}$$

было приведено в (3.27) в виде

$$H_z(x, t; n) = H_0 \Gamma(1/2\, n + 1) \left(2 \sqrt{\frac{t}{t_0}}\right)^n \{i^n \operatorname{erfc} \xi\}, \tag{4.20}$$

где

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\varkappa_0 t}}. \tag{4.21}$$

С помощью уравнений (П2.9) и (П2.10) получим

$$\left[\frac{\partial H_z(x, t; n)}{\partial x}\right]_{x=0} = -H_0 \frac{\Gamma(1/2 n + 1)}{\Gamma(1/2 n + 1/2)} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2n} \frac{1}{\sqrt{\varkappa_0 t}}. \tag{4.22}$$

4.7. Используя эти выражения, из уравнения (4.12) найдем полную энергию, поглощаемую проводником,

$$W_T(t; n) = \frac{1}{2} \mu H_z^2(0, t; n)\, s_{\varphi, n} \frac{n+1}{n + \frac{1}{2}}, \tag{4.23}$$

где $s_{\varphi, n}$ — толщина скин-слоя магнитного потока (3.32)

$$s_{\varphi, n} = \frac{\Gamma(1/2 n + 1)}{\Gamma(1/2 n + 3/2)} \sqrt{\varkappa_0 t} \tag{4.24}$$

и $H_z(0, t, n)$ — поле на поверхности (4.19).

Для энергии магнитного поля (4.16) легко получим

$$W_M(t; n) = \frac{1}{2} \mu [H_z(0, t; n)]^2 s_{\varphi, n} 2^{2n+1} \Gamma\left(\frac{1}{2} n + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} n + \frac{3}{2}\right) I_n. \tag{4.25}$$

Омические потери (4.15) определяются выражением

$$W_R(t; n) = \frac{1}{2} \mu [H_z(0, t; n)]^2 s_{\varphi, n} \frac{2^{2n}}{n + \frac{1}{2}} \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2} n + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} n + \frac{3}{2}\right) I_{n-1}. \tag{4.26}$$

Здесь I_n — функция, равная

$$I_n = \int_0^\infty (i^n \operatorname{erfc} \xi)^2\, d\xi. \tag{4.27}$$

4.8. Интеграл (4.27) с помощью (П2.8) можно преобразовать к виду

$$I_n = \frac{1}{2n} \int_0^\infty [\{i^{n-2} \operatorname{erfc} \xi\} - 2\xi \{i^{n-1} \operatorname{erfc} \xi\}] \{i^n \operatorname{erfc} \xi\}\, d\xi;$$

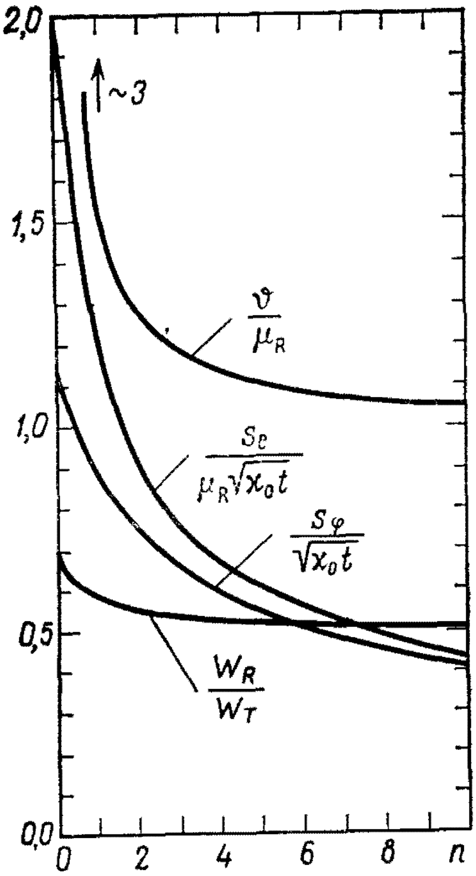
после двойного интегрирования по частям и, используя уравнение (П2.9), получаем рекуррентную формулу

$$2(n+1)I_n = \frac{1}{2^{2n-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)} - I_{n-1}.$$

Начиная с

$$I_{-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{-2x^2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad (n=0),$$

можно определить значения всех других интегралов ($n \geqslant 1$), и из уравнений (4.25), (4.26) — соответствующие выражения для W_M и W_R (табл. 4.II).



Фиг. 4.1. Зависимость различных величин от n для случая граничного поля $H_b = H_0(t/t_0)^{1/2n}$.

Сверху вниз: коэффициент поверхностной энергии ϑ, нормированная толщина скин-слоя энергии s_e, нормированная толщина скин-слоя магнитного потока s_φ и отношение энергии джоулева нагрева W_R к полной поглощенной энергии W_T.

На фиг. 4.1 изображены относительные доли теплового рассеяния (W_R/W_T) и безразмерная толщина скин-слоя $s_{\varphi,n}/\sqrt{\varkappa_0 t}$ в виде функций от n. Как видно, эти величины слабо зависят от n, в то время как форма импульса магнитного поля при изменении n от 0 до 10 изменяется существенно (см. фиг. 3.2). Легко проверить с помощью рекуррентной формулы, что выражения (4.23), (4.25) и (4.26) удовлетворяют уравнению баланса энергии (4.14).

4.9. При расчете температуры на поверхности (при $x = 0$) из (4.9) с помощью (4.22) легко находим для $n = 1, 2, \ldots$

$$c_v\theta(0, t; n) = \frac{1}{2}\mu\,[H_z(0, t; n)]^2 \frac{2}{n}\left[\frac{\Gamma(^1/_2 n + 1)}{\Gamma(^1/_2 n + ^1/_2)}\right]^2. \qquad (4.28)$$

Случай $n = 0$ нужно рассматривать отдельно, так как для него интегрирование приводит к логарифмической расходимости.

Граничное условие, заданное в виде ступенчатой функции

4.10. Случай $n = 0$ соответствует граничному условию, заданному в виде ступенчатой функции. Из решения (4.20) ($n = 0$) следует выражение

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{H_0}{\sqrt{\varkappa_0 t}}e^{-\xi^2}, \qquad (4.29)$$

используя которое, находим для температуры (4.9)

$$c_v\theta(x, t) = c_v\theta(\xi) = \frac{\mu H_0^2}{\pi}\int\limits_0^t e^{-x^2/2\varkappa_0 t}\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\mu H_0^2\frac{2}{\pi}E_i(-2\xi^2). \qquad (4.30)$$

В работе [4.2] приведены табличные значения функции

$$E_i(-2\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{-2\xi^2}\frac{e^\lambda}{\lambda}d\lambda.$$

Из этого выражения получаем, что температура на поверхности ($\xi \to 0$) равна бесконечности ($\ln\xi \to \infty$) вследствие того, что приложенное к проводнику поле H_0 претерпевает скачок при $t = 0$.

В данном случае в уравнении (4.1) необходимо учитывать член, обусловленный теплопроводностью, которая ограничивает температуру проводника. Согласно Киддеру [4.3], значение максимальной температуры при этом приближенно равно

$$c_v\theta(\xi = 0) = c_v\theta_{\text{макс}} \approx \frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 \ln\left[1 + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{c_v\varkappa_0}{2\lambda}}\right], \qquad (4.31)$$

где λ — удельная теплопроводность, определенная в уравнении (4.1). Из этого выражения следует, что для меди (при $\lambda/\varkappa_0 c_v \approx \approx 0{,}009$) плотность тепловой энергии на поверхности проводника примерно в 3 раза больше плотности магнитной энергии приложенного поля, т. е.

$$c_v\theta_{\text{макс}} \approx \frac{3}{2}\mu_0 H_0^2. \tag{4.32}$$

Таким образом, очень быстрое возрастание магнитного поля (фактически в виде ступенчатого скачка) до приблизительно 0,5 МЭ может расплавить поверхность медного проводника.

Граничное условие, заданное в виде синусоидальной функции

4.11. Расчеты температуры и рассеиваемой энергии могут быть распространены и на случай с другими граничными условиями. Например, для стационарного поля

$$H_z(0, t) = H_0 \sin \omega t, \quad -\infty < t < \infty, \tag{4.33}$$

используя уравнения (4.9), (4.12) совместно с (3.42), (3.43), легко найти

$$c_v\theta(x, t) = \frac{1}{2}\mu H_0^2 \omega e^{-2x/\delta}\left[t - \frac{1}{2\omega}\cos\left(\frac{2x}{\delta} - 2\omega t\right) + \frac{1}{2\omega}\cos\frac{2x}{\delta}\right], \tag{4.34}$$

$$W_T(t) = \frac{1}{2}\mu H_0^2 \delta \frac{1}{2}\omega\left[t - \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\sin\left(2\omega t + \frac{1}{4}\pi\right) + \frac{1}{2\omega}\right], \tag{4.35}$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varkappa_0}{\omega}} \tag{4.36}$$

и

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{4.37}$$

Все эти выражения рассчитаны для (произвольно выбранного) временнóго интервала $(0, t)$. Если таким же способом рассчитать W_R и W_M, то можно убедиться, что для стационарного поля уравнение баланса энергии (4.14) не выполняется, так как в этом случае W_R и W_M не могут быть отнесены только к одному периоду. Действительно, в момент $t = 0$ в проводнике уже имеется установившееся поле диффузии с энергией $W_M = {}^1/_2\mu H^2\,{}^1/_8\delta$, причем в начале каждого периода энергия диффузионного поля равна этой же величине, так что $W_T(T) \equiv W_R(T)$.

Определения и результаты

4.12. Во всех рассмотренных примерах температура на поверхности проводника может быть записана в общем виде

$$c_v\theta(0, t) = \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2(0, t)\,\vartheta(t), \tag{4.38}$$

где ϑ, *коэффициент поверхностной энергии*, зависит от формы и длительности импульса поля и по величине порядка единицы. Аналогично полная рассеиваемая энергия [уравнение (4.23)] может быть записана в виде

$$W_T = \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2(0, t)\, s_e(t), \tag{4.39}$$

где $s_e(t)$ — *толщина скин-слоя энергии*. Соответствующие выражения в практической системе электрических единиц получаются очевидной подстановкой

$$\frac{1}{2}\mu_0 H^2 \longrightarrow \frac{H^2}{8\pi}. \tag{4.39*}$$

Используя уравнения (4.28), (4.23), (4.24), можно исследовать зависимость указанных величин от относительной магнитной проницаемости

$$\begin{aligned} \vartheta &\sim \mu_R, \\ s_e &\sim \sqrt{\mu_R}, \\ s_\varphi &\sim \frac{1}{\sqrt{\mu_R}}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Из (4.40) следует, что, например, для ферромагнитных проводников при значениях полей, меньших предела намагничивания, полная рассеиваемая энергия и особенно поверхностная температура могут быть заметно выше, чем для проводников из немагнитных материалов.

Величины ϑ/μ_R, s_e/μ_R, а также толщина скин-слоя магнитного потока и отношения W_R/W_T и W_M/W_T приведены в табл. 4.II для различных полей на границе проводника. Результаты для нестационарного случая при граничном условии, заданном синусоидальной функцией, были получены на цифровой вычислительной машине с использованием уравнений (3.39) и (3.40). Интересно отметить, что во всех случаях монотонно возрастающих импульсных магнитных полей результаты получаются приблизительно одинаковыми (первые 6 случаев в табл. 4.II, за исключением ступенчатого скачка; см. также фиг. 3.2). Отсюда можно сделать заключение об относительной нечувствительности рассчитанных величин к форме импульса. Другое замечание относится к действию стационарного и переходного синусоидальных полей. Как можно было ожидать, между ними существует заметное различие в первой четверти периода. Это касается прежде всего поверхностной температуры, которая для стационарного случая примерно в 1,6 раза больше, чем для переходного. В обоих случаях большая часть рассеиваемой за период энергии теряется к моменту $t = {}^1/_4 T$. Например, из табл. 4.II для медного проводника находим, что в нестационарном случае к концу четверти периода поверхностная температура возрастает до величины

$$\theta\left(\frac{1}{4}T\right) \approx 2000H^2\,(^\circ\text{C, МЭ}),$$

откуда следует, что при амплитуде поля 750 кЭ температура на поверхности (при начальной температуре $\theta = 0\ ^\circ$C) достигает точки плавления.

4.13. Используя понятие толщины скин-слоя энергии, определенное в уравнении (4.39), можно грубо, но с достаточной для практики точностью оценить потери энергии для случая плоских проводников или проводников, у которых основной радиус кривизны больше s_e. Например, в длинном одновитковом соленоиде с внутренним радиусом a, большим s_e, отношение полных энергетических потерь к энергии, индуктивно запасенной во внутренней полости, приближенно равно

$$\eta_W \approx \frac{2\pi a s_e}{\pi a^2} = 2\,\frac{s_e}{a}.$$

Тогда Q-фактор такого соленоида при периодическом поле с $s_e = \pi\delta$ (табл. 4.II) можно записать в виде

$$Q_{\text{колеб}} = \frac{2\pi}{\eta_W} \approx \frac{a}{\delta}$$

Эти формулы, как и уравнение (4.39), верны для «толстых» проводников, т. е. проводников, толщина которых d намного больше s_e. С другой стороны, как будет показано в п. 4.16, для «тонких» проводников ($d \ll s_e$) потери энергии приблизительно в $(s_e/d)^2$ раз больше, чем в соответствующем случае для «толстого» проводника.

§ 3. НАГРЕВ «ТОНКИХ» ПРОВОДНИКОВ ($\sigma = \text{const}$)

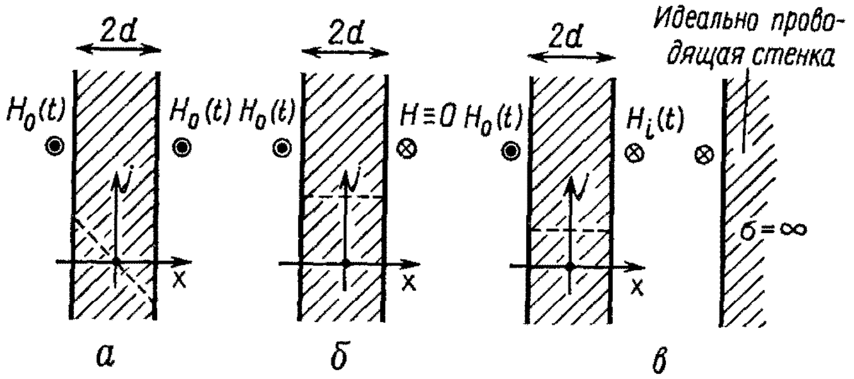
4.14. Рассмотрим пластину толщиной $2d$ (см. п. 3.18, фиг. 3.6) и предположим, что она является тонкой, т. е. d намного меньше соответствующей толщины скин-слоя s_φ. Как будет показано ниже, температура на поверхности тонкой пластины отличается от температуры для случая полупространства и сильно зависит от граничных условий.

Рассмотрим три задачи, имеющие практическое значение (фиг. 4.2).

а) Пластина находится в магнитном поле, причем граничные условия одинаковы на обеих плоскостях. [В дальнейшем будет показано, что для $s_\varphi \gg d$ температура пропорциональна $(d/s_\varphi)^2$.]

б) Заданное магнитное поле имеется только с одной стороны пластины, с другой стороны поле равно нулю. [В этом случае для $s_\varphi \gg d$ температура пропорциональна $(s_\varphi/d)^2$.]

в) Пластина ограничена конечным пространством, т. е. имеются граничные условия типа (3.94). (Аналогичная ей задача термо-



Фиг. 4.2. Три вида граничных условий для «тонкой» пластины.

диффузии рассматривается в работе [3.1], стр. 129.) Эта задача будет рассмотрена в п. 4.27 применительно к проводнику в форме полого цилиндра ($s_\varphi \gg d$).

Плоская геометрия

4.15. В качестве примера задачи типа «а» (фиг. 4.2, *а*) рассмотрим случай стационарного внешнего поля (3.55)

$$H_z(\pm d,\, t) = H_0 \sin \omega t \quad \text{для} \quad -\infty < t < \infty. \tag{4.41}$$

Тогда решение для поля внутри пластины толщиной $2d$ определяется выражением

$$H_z(x,\, t) = H_0 \alpha(x) \sin[\omega t - \varphi(x)], \tag{4.42}$$

где функции $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$ даны в (3.57) и (3.58). Если воспользоваться приближениями $\operatorname{ch} z \approx 1 + {}^1/_2 z^2$, $\cos z \approx 1 - {}^1/_2 z^2$, $\operatorname{sh} z \approx z$, $\sin z \approx z$ для $2d/\delta \ll 1$, то эти функции сводятся к простым выражениям

$$\alpha \approx 1, \qquad \varphi \approx \frac{d^2 - x^2}{\delta^2},$$

где δ — толщина скин-слоя для гармонических колебаний (4.36). Из (4.42) следует приближенное выражение (в пренебрежении членами второго порядка малости, т. е. $t \gg d^2/2\varkappa_0$)

$$\frac{\partial H_z(x,\, t)}{\partial x} \approx 2H_0 \frac{x}{\delta^2} \cos \omega t, \tag{4.43}$$

и, следовательно, для температуры (4.9) имеем

$$c_v\theta(x, t) \approx \frac{1}{2}\mu H_0^2 \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 2\omega \left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]. \tag{4.44}$$

Поверхностная температура к концу каждой четверти периода равна

$$c_v\theta\left(\pm d, \frac{1}{4}T\right) \approx \frac{1}{2}\mu H_0^2 \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \pi. \tag{4.45}$$

Видно, что по сравнению со значением для случая полупространства [уравнение (4.34)] она уменьшается приблизительно в

$$\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{s_\varphi}\right)^2 \tag{4.46}$$

раз. Так как в уравнении (4.43) не присутствует фазовый сдвиг, температурное уравнение (4.44) можно рассматривать как приемлемое приближение и для переходного режима. Обычно этот результат справедлив и при других граничных условиях (с точностью до численного множителя).

4.16. Теперь рассмотрим задачу типа *б* (фиг. 4.2, *б*), т. е. случай, когда магнитное поле $H_z(t)$ имеется только с одной стороны тонкого проводника толщиной $2d$, т. е. имеют место граничные условия

$$\left.\begin{aligned} H_z(d, t) &= 0 \\ H_z(-d, t) &= H_z(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{4.47}$$

Точное решение для поля диффузии $H_z(x, t)$ приводится в [3.1], стр. 105. Однако в нашем случае ($s_\varphi \gg d$) можно полагать, что плотность тока j_y одинакова по толщине пластины, поэтому

$$2dj_y = -H_z(t) \tag{4.48}$$

и средняя температура определяется равенством

$$c_v\theta(t) = \int_0^t \frac{j_y^2}{\sigma}\,dt = \frac{\varkappa_0}{2d^2}\,\frac{1}{2}\mu \int_0^t H_z^2(t)\,dt. \tag{4.49}$$

Уже из уравнения (4.49) видно, что в выражение для температуры входит множитель $\sim (s_\varphi/d)^2$. Например, для

$$H_z(t) = H_0 \sin\omega t$$

легко находим

$$c_v\theta(t) = \frac{1}{2}\mu H_0^2 \left(\frac{\delta}{2d}\right)^2 \pi \left[\frac{t}{T} + \frac{\sin 2\omega t}{4\pi}\right], \tag{4.50}$$

где δ определяется в (4.36).

Цилиндрическая геометрия

4.17. Случай цилиндрического проводника мы рассмотрим только для граничного условия

$$H = H_0 \sin \omega t \quad \text{для} \quad -\infty < t < \infty. \tag{4.51}$$

В пределе $a \gg s$ (a — радиус, s — характеристическая толщина скин-слоя) задача с достаточной точностью приближается к плоскому случаю (п. 4.11). В пределе $a/s \ll 1$ результат аналогичен полученному для тонкой пластины [уравнение (4.44)]. Из общего решения (3.87), используя приближения ($z \to 0$) $\mathrm{ber}\, z \approx 1$, $\mathrm{bei}\, z \approx {}^1/_4 z^2$ [3.8], находим

$$h \approx 1, \quad \alpha \approx \frac{r^2 - a^2}{2\delta^2};$$

следовательно (для $t \gg a^2/4\varkappa_0$),

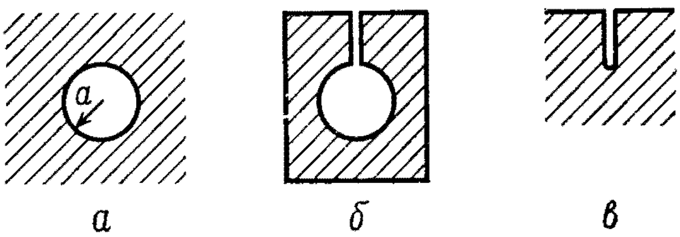
$$\frac{\partial H_z(r, t)}{\partial r} \approx H_0 \frac{r}{\delta^2} \cos \omega t, \tag{4.52}$$

Тогда, например для температуры, получаем [из уравнения (4.9)] в цилиндрической геометрии

$$c_v \theta(r, t) \approx \frac{1}{2} \mu H_0^2 \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \frac{1}{2} \omega \left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]. \tag{4.53}$$

Видно, что поверхностная температура для цилиндра в 4 раза меньше, чем для пластины толщиной $2d = 2a$.

4.18. Рассмотрим теперь дополнительную задачу (п. 3.31) — случай толстого одновиткового соленоида (фиг. 4.3, *б*), на цилиндрической (радиусом a) внутренней поверхности которого выпол-



Фиг. 4.3. *а* — бесконечный проводник с цилиндрическим отверстием радиусом a; на практике этим приближением можно воспользоваться в случае толстого одновиткового соленоида (*б*) или в случае неоднородностей, имеющих вид (*в*).

няется граничное условие (4.51). Учтем, что в пределе $z \to 0$ справедливы приближенные соотношения $\mathrm{ker}\, z \approx -\ln z$, $\mathrm{kei}\, z \approx -{}^1/_4 \pi$ [3.8]. Тогда для $a \ll \delta$ из решений (3.91), (3.92) находим

$$\left[\frac{\partial H_z(r, t)}{\partial r}\right]_{r=a} \approx \frac{H_0}{a \ln(\sqrt{2}\, a/\delta)} \cos \omega t, \tag{4.54}$$

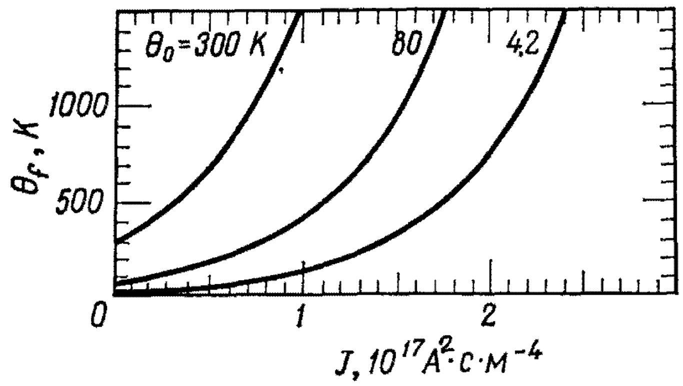
следовательно, выражение для температуры можно записать в виде

$$c_v\theta(a, t) \approx \frac{1}{2}\mu H_0^2 \frac{1}{[(\sqrt{2}\,a/\delta)\ln(\sqrt{2}\,a/\delta)]^2}\,\omega\left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]. \quad (4.55)$$

Так как $\lim\limits_{z\to 0}(z \ln z) = 0$, температура на внутренней поверхности соленоида при $a/\delta \ll 1$ может быть заметно выше, чем для проводника, радиус кривизны которого больше толщины скин-слоя, чего и следовало ожидать из сказанного в п. 3.32. На «дне» неровностей проводника (см. фиг. 4.3, *в*) температура может достигать очень больших значений (выше точки плавления), что в результате постепенно ведет к надрезу проводника (*эффект пилы*, [7.16б]).

Интеграл тока

4.19. Этот пункт является до некоторой степени связующим звеном между первой частью главы и второй, в которой электропроводность будет рассматриваться уже как величина, зависящая от степени нагрева проводника.



Фиг. 4.4. Интеграл тока для меди [4.11].

Введем понятие *интеграла тока* (или *интеграла инерции*)

$$J = \int_0^t j_y^2\,dt, \quad (4.56)$$

который играет важную роль в теории диффузии применительно к тонким проводящим листам. Интегрируя уравнение (4.4), находим

$$\int_0^t j_y^2\,dt = \int_{Q_0}^{Q_f} \sigma\,dQ. \quad (4.57)$$

Это выражение показывает, что J зависит только от свойств проводника $[\sigma(Q)]$ и начальной и конечной плотностей энергии

(Q_0, Q_f), или, что то же самое [см. (4.2)], от начальной и конечной температур (θ_0, θ_f). На фиг. 4.4 изображены кривые конечной температуры θ_f в зависимости от J для трех значений начальной температуры $\theta_0 = 4{,}2$, 80, 300 К. В табл. 4.III для различных

ТАБЛИЦА 4.III

Значения интеграла тока (взятые из [9.22]; см. также табл. 5.II) при комнатной начальной температуре

Металл	J_{sm} (твердое сост.)	J_{lm} (жидкое сост.)	J_{lb} (жидкое сост.)	J_{vb} (пар)
Размерность	10^{17} А^2·с·м$^{-4}$			
Al	0,32	0,40	0,59	1,09
Cu	0,89	1,05	1,24	1,95

металлов приведены значения интеграла тока (4.57), вычисленные в пределах от комнатной температуры до температуры фазового перехода (твердое и жидкое состояния при температуре плавления обозначены соответственно индексами sm и lm; жидкое и парообразное состояния при температуре кипения — lb и vb). Эти значения получены из данных экспериментов по взрывающимся проволочкам [9.22, 4.5]. Если необходимо, чтобы проводник во время разряда оставался в твердом состоянии, то должно выполняться условие $J < J_{sm}$; это условие накладывает ограничение на токовый импульс, действующий на проводник, поскольку он определяет значение интеграла тока J.

Из выражения для электропроводности (4.59) легко найти

$$J = \frac{\sigma_0}{\beta} \ln \frac{1+\beta Q_f}{1+\beta Q_0}. \tag{4.58}$$

§ 4. НЕЛИНЕЙНАЯ МАГНИТНАЯ ДИФФУЗИЯ

4.20. Рассмотренная ранее теория диффузии обладает существенной ограниченностью, так как в ней предполагается, что электропроводность σ не изменяется во время диффузионного процесса. В действительности же мы наблюдаем совершенно иную картину. Как было показано ранее, вследствие диффузии магнитного поля происходит нагрев токонесущего слоя проводника и соответственно изменяется σ. В последующих пунктах мы будем полагать, что электропроводность зависит только от темлосодержания проводника, и пренебрежем эффектами, связанными со сжимаемостью металлов и фазовыми изменениями. Тем не менее уравнения, описывающие проникновение магнитного поля, становятся настолько сложными, что обычно решаются только численными методами. Поскольку рассматривается нелинейная диффузия, т. е. случай очень сильных магнитных полей, мы всегда будем полагать, что относительная магнитная проницаемость равна единице, т. е. $\mu \equiv \mu_0$.

Закон проводимости

4.21. Для электропроводности справедливо выражение

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1+\beta Q}, \tag{4.59}$$

где σ_0 — электропроводность при 0 °С, β — *тепловой коэффициент* и Q — прирост внутренней энергии (или прирост теплосодержания по отношению к состоянию при 0 °С), который для твердой фазы связан с температурой θ уравнением (4.2)

$$Q = c_v\theta. \tag{4.60}$$

Как будет показано в п. 10.42, выражение (4.59) с хорошей точностью описывает изменение электропроводности вплоть до момента испарения металла.

Тогда тепловое уравнение (4.4) принимает вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = (1+\beta Q)\frac{j_y^2}{\sigma_0}, \tag{4.61}$$

или, в интегральной форме,

$$1+\beta Q = \exp\left\{\frac{\beta}{\sigma_0}\int_0^t j_y^2\,dt\right\}; \tag{4.62}$$

интеграл в (4.62) соответствует интегралу тока (см. п. 4.19).

Уравнения нелинейной диффузии

4.22. Диффузия магнитных полей в плоский несжимаемый проводник (одномерная задача) может быть описана с помощью уравнений Максвелла (3.13), (3.14), закона Ома (3.1), закона проводимости в виде (4.59) и теплового уравнения (4.61). Ограничиваясь одной составляющей плотности тока j_y и полагая $\mu = \mu_0$, получаем

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\sigma_0}{1+\beta Q} E_y. \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1+\beta Q}{\sigma_0} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)^2. \tag{4.65}$$

Необходимо задать дополнительно граничное и начальное условия, которые для проводника, занимающего полупространство, имеют простую форму

$$x = 0: \qquad H_z(0,\ t) = H_0(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{4.66}$$

$$t = 0: \qquad H_z(x,\ 0) = 0, \qquad x \geqslant 0. \tag{4.67}$$

Приближенное решение

4.23. Для пояснения наиболее важных особенностей нелинейной диффузии магнитного поля обсудим приближенное решение (справедливое для больших магнитных полей) системы дифференциальных уравнений в частных производных (4.63)—(4.65), соответствующее граничному условию в виде параболической функции времени

$$H(0,\ t) = H_0(t) = h_c \sqrt{\frac{t}{t_0}}, \tag{4.68}$$

для удобства записанной через *характеристическое поле*

$$h_c = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \beta}}, \tag{4.69}$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$h_c = \sqrt{\frac{8\pi}{\beta}} \tag{4.70*}$$

(см. табл. 10.IV), и свободный параметр t_0, который определяет временну́ю шкалу поля на границе проводника. Импульс поля (4.68) с хорошей точностью может быть аппроксимирован первой четвертью периода синусоидального нестационарного поля, как было показано в п. 3.11.

В пределе

$$\beta Q \gg 1 \tag{4.71}$$

из системы уравнений (4.63)—(4.65) легко получить приближенное решение

$$\frac{H_z(x,\ t)}{h_c} \approx \left(\frac{t}{t_0} - \frac{x}{s_0}\right)^{1/2}, \tag{4.72}$$

$$\beta Q(x,\ t) \approx \frac{t}{t_0} - \frac{x}{s_0}, \tag{4.73}$$

где

$$s_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \varkappa_0 t_0} \tag{4.74}$$

и

$$\varkappa_0 = \frac{1}{\mu_0 \sigma_0}. \tag{4.75}$$

Из (4.72) и (4.73) следуют выражения

$$j_y(x, t) \approx \frac{h_c}{2s_0} \left(\frac{t}{t_0} - \frac{x}{s_0} \right)^{-1/2} \tag{4.76}$$

и

$$\beta Q(x, t) \approx \left[\frac{H_z(x, t)}{h_c} \right]^2 = \frac{1}{2} \beta \mu_0 H_z^2(x, t). \tag{4.77}$$

Так как расчеты были сделаны в предположении (4.71), то из (4.77) следует, что решения (4.72) и (4.73) справедливы только для больших полей

$$H_z(x, t) \gg h_c \tag{4.78}$$

или, согласно граничному условию (4.68), для моментов времени

$$t \gg t_0. \tag{4.79}$$

Кроме того, решения остаются в силе только для ограниченной глубины, определяемой неравенством

$$x \ll s_0 \frac{t}{t_0}. \tag{4.80}$$

Из рассмотрения уравнения (4.77) становится понятным физический смысл критического поля h_c. Действительно, критическое поле $H = h_c$ — это такое магнитное поле, при котором

$$\beta Q = \frac{1}{2} \beta \mu_0 H^2 = 1, \tag{4.81}$$

т. е. при котором электропроводность (4.59) уменьшается до половины своего первоначального значения. Как мы уже видели, h_c представляет собой такое нестационарное поле, при превышении которого преобладающую роль в процессе магнитной диффузии начинают играть тепловые эффекты.

Используя уравнения (4.72) и (4.76), рассчитаем толщину скин-слоя магнитного потока s_φ [определенную в уравнении (3.31)]

$$\frac{s_\varphi}{s_0} \approx \frac{2}{3} \frac{t}{t_0} = \frac{2H_0(t)}{3h_c} \sqrt{\frac{t}{t_0}}, \tag{4.82}$$

толщину скин-слоя энергии s_e [определенную в уравнении (4.39)]

$$\frac{s_e}{s_0} \approx \frac{t}{t_0} = \frac{H_0(t)}{h_c} \sqrt{\frac{t}{t_0}} = \frac{3s_\varphi}{2s_0} \tag{4.83}$$

и фактор поверхностной энергии ϑ [определенный в уравнении (4.38)]

$$\vartheta \approx 1. \tag{4.84}$$

4.24. В пределе

$$H \ll h_c$$

получаем решение задачи магнитной диффузии, которое, согласно уравнениям (4.20), (4.22), (4.23), (4.39), (4.38) и (4.28), может быть записано в виде

$$\frac{H_z}{h_c} = \sqrt{\frac{t}{t_0}}\,\{e^{-\xi^2} - \sqrt{\pi}\,\xi\,(1 - \operatorname{erf}\xi)\}, \tag{4.85}$$

$$\frac{j}{h_c/s_0} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,(1 - \operatorname{erf}\xi), \tag{4.86}$$

$$\frac{s_\varphi}{s_0} = \sqrt{\frac{1}{8}\pi\frac{t}{t_0}}, \tag{4.87}$$

$$\frac{s_e}{s_0} = \frac{1}{3}\sqrt{2\pi\frac{t}{t_0}} = \frac{4s_\varphi}{3s_0}, \tag{4.88}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}\pi, \tag{4.89}$$

где

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{2}\,s_0}. \tag{4.90}$$

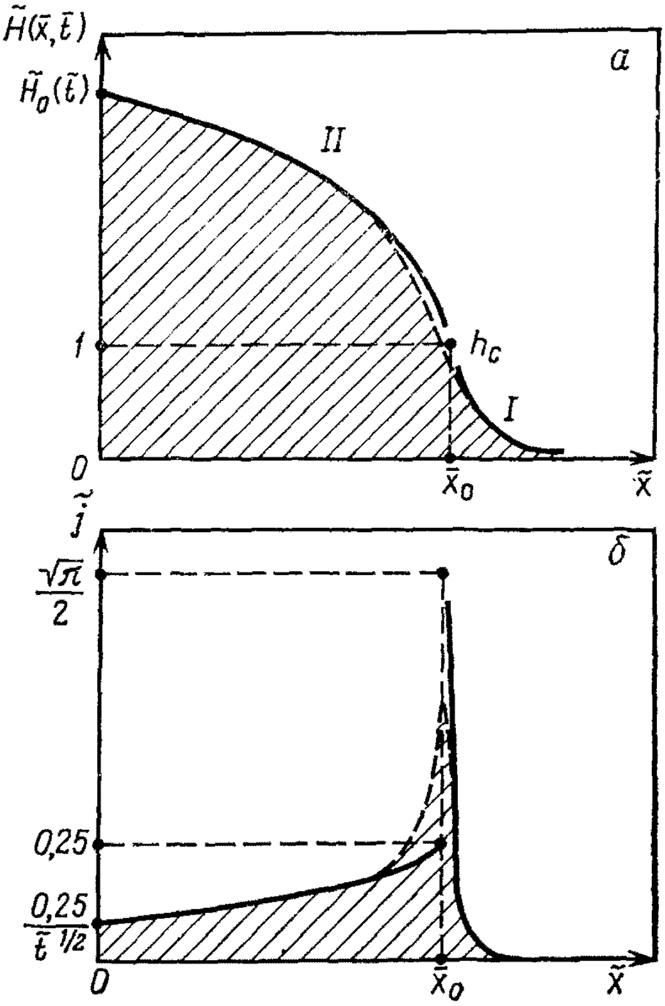
На фиг. 4.5, *а* кривая распределения магнитного поля в проводнике делится на две части точкой, соответствующей характеристическому полю h_c ($H_0/h_c \approx 1$), которому отвечает глубина

$$\frac{x_0}{s_0} = \frac{t}{t_0} - 1. \tag{4.91}$$

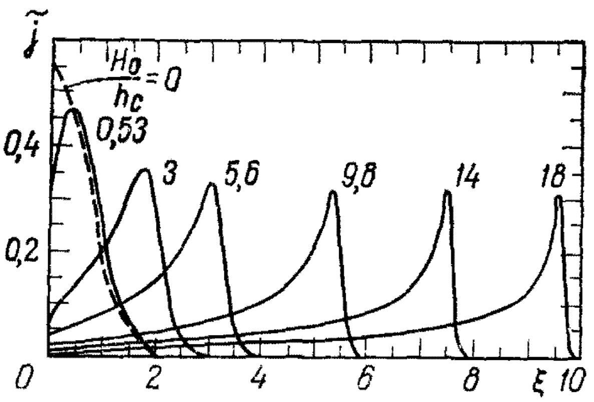
Профиль первой части (*I*) определяется классической диффузией [уравнение (4.85)], в то время как профиль второй (*II*) —нелинейной диффузией [значение поля медленно увеличивается до величины поля на границе $H_0(t)/h_c$, согласно уравнению (4.72)]. Соответственно на кривой плотности тока имеется пик, определяемый в основном классической диффузией [уравнение (4.86)]; поверхностная плотность тока уменьшается как $\sqrt{t_0/t}$.

Такие распределения типичны для большого многообразия полей на границе проводника, поэтому можно говорить, что для процесса нелинейной диффузии характерна концентрация тока на движущемся фронте, который «вгрызается» в глубь проводника, заметно увеличивая тем самым величину диффузионного потока.

«Пик-эффект» наглядно виден также и из рассмотрения фиг. 4.6, где показано распределение тока, рассчитанное Киддером [4.3]



Ф и г. 4.5. *а* — типичное распределение магнитного поля для случая нелинейной диффузии (безразмерные величины, изображенные на графике, определяются следующим образом: $\tilde{H} = H/h_c$, $\tilde{x} = x/s_0$); *б* — плотность тока, соответствующая приближению, использованному для предыдущей фигуры ($\tilde{j} = j2s_0/h_c$, $\tilde{t} = t/t_0$).



Ф и г. 4.6. Безразмерная величина плотности тока (j $(\xi)\sqrt{\varkappa_0 t/H_0}$) [4.3] для случая граничного поля, заданного в виде ступенчатой функции $H_z(t) = H_0$ (const); величина ξ определяется в (4.90).

ТАБЛИЦА 4.IV

Значения (приближенные) s_φ, s_e, ϑ в пределе $H_0 \gg h_c$ [1])

Граничное поле $H_0(t)$	$\dfrac{s_\varphi}{(H_0(t)/h_c)\sqrt{\varkappa_0 t}}$	$\dfrac{s_e}{(H_0(t)/h_c)\sqrt{\varkappa_0 t}}$	ϑ	Ссылки
$H_0(t)=H_0$ (const)	0,8	—	∞	[4.3]
$H_0(t)=h_c(t/t_0)^{1/2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	п. 4.23
$H_0(t)=h_c(t/t_0)^{1/2n}$	$1/\sqrt{2n}$	$\sqrt{(2/n)(2n+1)(3n+1)}$	$1+1/2n$	[4.12]
$H_0(t)=H_0e^{t/t_0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{t_0/t}$	$\frac{4}{9}\sqrt{t_0/t}$	$^2/_3$	[8.1]

[1]) Грубые приближенные значения, рассчитанные по данным, которые приведены в ссылках; разница между значениями второй и третьей строк (при $n=1$) определяет меру аппроксимации.

при граничном условии, заданном в виде ступенчатой функции

$$H_z = H_0\,(\mathrm{const}) \text{ для } 0 \leqslant t < \infty.$$

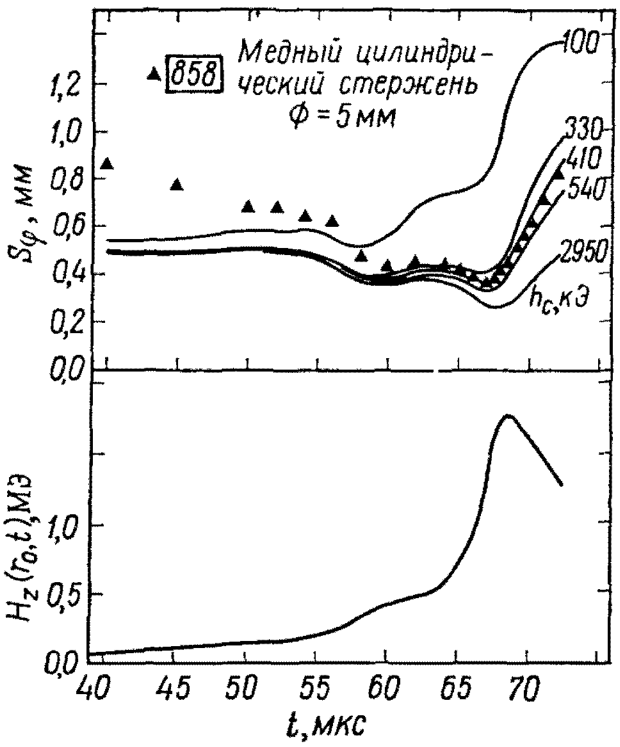
Такое же граничное поле использовалось и другими авторами [4.6, 4.7] для расчета процесса нелинейной магнитной диффузии, поскольку при этом задача сводится (как и в линейном случае) к обыкновенному дифференциальному уравнению, содержащему только переменную подобия ξ [уравнение (4.90)]. В [4.8] предложен специальный метод решения задачи нелинейной магнитной диффузии (с учетом тепловой диффузии).

Основные результаты

4.25. Выражения для временно́й зависимости толщины скин-слоя

$$s_\varphi \sim s_e \sim \frac{H_0(t)}{h_c}\sqrt{\varkappa_0 t}, \tag{4.92}$$

найденные в уравнениях (4.82), (4.83) для $H_0 \gg h_c$, как правило, остаются вполне справедливыми для граничных полей самого различного вида, как можно видеть из табл. 4.IV.



Фиг. 4.7. Расчетные и измеренные значения толщины скин-слоя магнитного потока для медного цилиндрического стержня радиусом $r_0 = 0{,}5$ см при поле на границе стержня, изображенном на нижней части фигуры [4.9].

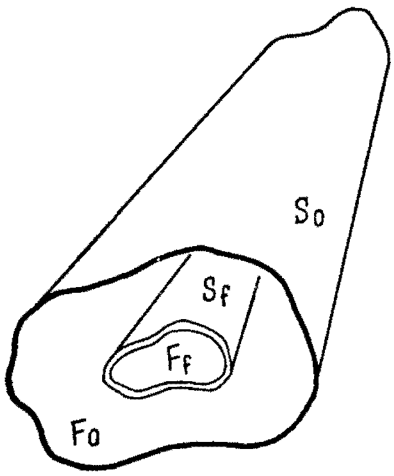
В п. 4.12 и табл. 4.II было показано, что коэффициент поверхностной энергии ϑ не зависит от электропроводности, которая принималась постоянной. Поэтому можно было бы ожидать, что

ϑ не будет существенно меняться и при наличии температурной зависимости. Это подтверждается не только результатами табл. 4.IV, но также и результатами численных расчетов большого количества различных диффузионных задач [1.30, 1.37, 1.39], в которых принималось, что электропроводность монотонно уменьшается с увеличением внутренней теплоты, как в уравнении (4.59). На практике для большинства экспериментально реализуемых граничных полей коэффициент ϑ изменяется от 0,5 до 1,5.

На фиг. 4.7 показаны значения рассчитанной и измеренной толщин скин-слоя для частного случая аксиального поверхностного поля и цилиндрического стержня радиусом $r_0 = 5$ мм в предположении температурной зависимости диффузии [4.9]. Кроме того, поскольку $r_0 \gg s_\varphi$, этот результат можно рассматривать как хорошее приближение для плоского случая. К концу процесса сжатия магнитного потока, когда $H_0(t) > h_c$, нелинейная диффузия начинает играть преобладающую роль, что ведет к быстрому увеличению толщины скин-слоя магнитного потока.

§ 5. ДИФФУЗИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОЛЫЙ ПРОВОДНИК

4.26. Рассмотрим систему с очень длинным полым проводником (фиг. 4.8), магнитные поля в которой ориентированы строго вдоль оси системы. Начальный магнитный поток ϕ_0, существовавший



Фиг. 4.8. Полый проводник, окруженный идеально проводящей замкнутой поверхностью S_0.

в момент $t = 0$ между поверхностью S_f и идеальным проводником S_0, диффундирует внутрь полого проводника, принимая значение $\phi_f = F_f \mu_0 H_f$ и тем самым уменьшая наружный поток до величины $\phi_1 = F_0 \mu_0 H_f$ (H_f — конечное магнитное поле). Здесь использованы следующие обозначения: F_0 — площадь поперечного сечения, заключенная между внутренним проводником S_f

и наружным проводником S_0; F_f — площадь поперечного сечения внутреннего проводника S_f. Принцип сохранения магнитного потока требует, чтобы выполнялось условие

$$\phi_0 = \phi_i + \phi_f.$$

Используя это выражение, нетрудно найти разность между начальной энергией $W_0 = \phi_0^2/2\mu_0 F_0$ и конечной энергией $W_f = \phi_f^2/2\mu_0 F_f + \phi_i^2/2\mu_0 F_0$, т. е. энергию, рассеянную за время всего процесса в проводнике S_f (на единицу длины),

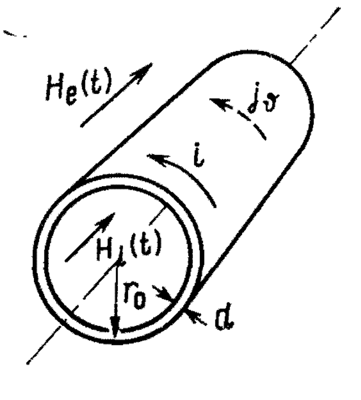
$$W_R = \frac{1}{2}\mu_0 H_f^2 F_f \left(1 + \frac{F_f}{F_0}\right), \tag{4.93}$$

которая не зависит от электропроводности внутреннего проводника. Это уравнение показывает, что для $F_0 \gg F_f$ (т. е. для наружного магнитного поля, остающегося приблизительно постоянным за время диффузии) рассеиваемая энергия равна конечной энергии магнитного поля в полом проводнике.

Результат получается таким же, если рассматривать задачу, в которой поток ϕ_0, первоначально сосредоточенный внутри полого проводника, диффундирует наружу. Используя предыдущие обозначения, нужно просто поменять местами F_f и F_0 в уравнении (4.93). Для особого случая $F_0/F_f \to \infty$ получается очевидный результат: вся энергия начального потока в итоге превращается в энергию омического нагрева.

Общие уравнения для случая тонкостенного проводника

4.27. Рассмотрим теперь более детально процесс диффузии аксиального магнитного поля сквозь полый, очень длинный цилиндрический проводник (фиг. 4.9), учитывая с самого начала тепло-



Фиг. 4.9. Тонкостенный цилиндрический проводник со средним радиусом r_0.

вую зависимость электропроводности, определяемую уравнением (4.59). Предполагается, что магнитное поле строго аксиально и имеет постоянное значение в полости проводника. Для простоты зададимся постоянством плотности тока j_ϑ по толщине проводящего листа; это условие выполняется, когда толщина проводника d меньше ширины скин-слоя магнитного потока s_φ (см. п. 4.16). Используя это предположение, являющееся приблизительно верным для большинства интересующих нас экспериментальных задач, можно свести уравнение диффузии в цилиндр для случая граничного условия на внутренней поверхности, заданного в виде (3.95), к обыкновенному дифференциальному уравнению. Поэтому решение существенно упрощается.

При упомянутом выше предположении можно записать

$$i = j_\vartheta d = H_i - H_e, \tag{4.94}$$

где i — линейная плотность тока и H_i, H_e — внутреннее и внешнее магнитное поле соответственно. С другой стороны, для индуцированного напряжения имеем

$$U_\vartheta = \frac{2\pi r_0}{\sigma d}\, i = -\mu_0 \pi r_0^2 \frac{dH_i}{dt}; \tag{4.95}$$

это выражение в сочетании с (4.94) приводит к дифференциальному уравнению для $H_i(t)$

$$\tau \frac{dH_i}{dt} + H_i = H_e, \tag{4.96}$$

где постоянная времени τ определяется выражением

$$\tau = \frac{r_0 d}{2\varkappa} = \frac{1}{2}\mu_0 r_0\, d\sigma. \tag{4.97}$$

4.28. Кроме того, необходимо учитывать увеличение внутренней энергии Q за счет омического нагрева, причем для твердой фазы величина Q связана с температурой уравнением (4.2). Если воспользоваться обычным законом проводимости (4.59) и, более того, принять постоянным значение теплоемкости c_v, то тепловое уравнение (4.62) записывается в следующем виде:

$$1 + \beta Q = \exp\left\{\frac{2}{\tau_0 H_c^2}\int_0^t (H_i - H_e)^2\, dt\right\}, \tag{4.98}$$

где, согласно Шнеерсону [4.10], введено «*модифицированное*» *характеристическое поле* H_c, связанное с характеристическим полем h_c [определяемым уравнением (4.69)] следующим соотношением:

$$H_c = h_c \sqrt{\frac{2d}{r_0}}. \tag{4.99}$$

Постоянная времени может быть записана в виде

$$\tau = \frac{\tau_0}{1 + \beta Q}, \tag{4.100}$$

где

$$\tau_0 = \frac{r_0 d}{2\varkappa_0}. \tag{4.101}$$

Численное решение системы уравнений (4.96), (4.98), (4.100) для H_i находится относительно просто; в дальнейшем мы рассмотрим решение, соответствующее синусоидальному граничному полю $H_e = H_0 \sin \omega t$. В предельном случае, когда $H_e \ll H_c$, задача упрощается и сводится к дифференциальному уравнению (4.96) с $\tau \approx \tau_0$. Решение для наиболее важных случаев может быть затем найдено прямым интегрированием.

Граничное условие, заданное в виде ступенчатой функции

4.29. Если внешнее поле H_e описывается обычной ступенчатой функцией

$$\begin{aligned} &H_e = H_0 \,(\mathrm{const}) \quad &\text{для} \quad &0 \leqslant t < \infty, \\ &H_e = 0 \quad &\text{для} \quad &t < 0, \end{aligned} \tag{4.102}$$

то основная задача определения температуры может быть решена даже аналитически [4.10]. Действительно, в этом случае, умножая (4.96) на $(H_i - H_0)$ и используя (4.98) и (4.100), получаем уравнение [для $(H_i - H_0)^2$]

$$\frac{d\,(H_i - H_0)^2}{dt} = -\frac{2}{\tau_0}(H_i - H_0)^2 \exp\left\{\frac{2}{\tau_0 H_0^2}\int_0^t (H_i - H_0)^2\, dt\right\}, \tag{4.103}$$

которое после частичного интегрирования легко преобразуется к виду

$$(H_i - H_0)^2 - H_0^2 = -H_c^2 \left\{\exp\left[\frac{2}{\tau_0 H_0^2}\int_0^t (H_i - H_0)^2\, dt\right] - 1\right\}. \tag{4.104}$$

Используя (4.103), можно устранить в (4.104) член, содержащий интеграл, и, интегрируя еще раз, получить

$$\ln\left\{-\left(\frac{H_0}{H_c}\right)^2 + \left[\left(\frac{H_0}{H_c}\right)^2 + 1\right]\left(\frac{H_0}{H_i - H_0}\right)^2\right\} = 2\,\frac{t}{\tau_0}\left[1 + \left(\frac{H_0}{H_c}\right)^2\right];$$

отсюда следует решение

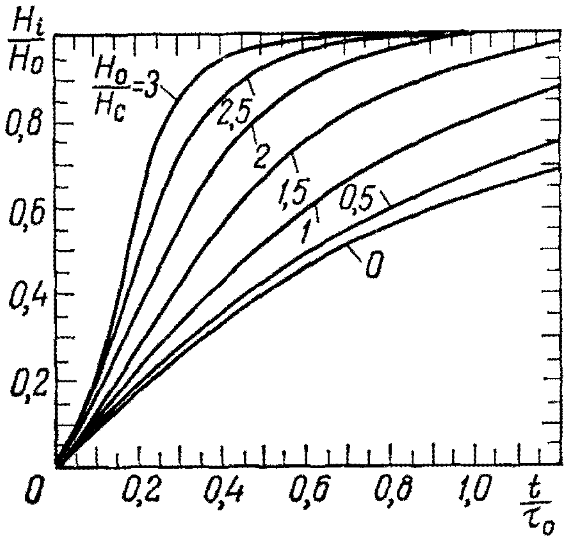
$$H_i = H_0 \left\{1 - \left[\frac{1 + (H_0/H_c)^2}{(H_0/H_c)^2 + \exp\{2\,(t/\tau_0)\,[1 + (H_0/H_c)^2]\}}\right]^{1/2}\right\}, \tag{4.105}$$

которое графически изображено на фиг. 4.10. При $H_0 \ll H_c$ эта формула упрощается:

$$H_i \approx H_0\,(1 - e^{-t/\tau_0}). \tag{4.106}$$

Этот результат можно было бы получить непосредственно из уравнения (4.96), полагая $\tau \approx \tau_0$.

Оба решения (4.105) и (4.106) могут быть непосредственно использованы для описания затухания поля внутри полого



Ф и г. 4.10. Диффузия поля, заданного в виде ступенчатой функции, в тонкостенный полый проводник при учете температурных эффектов [4.10].

проводника (при начальном значении H_0). В пределе, соответствующем уравнению (4.106), имеем

$$H_i = H_0 e^{-t/\tau_0}, \tag{4.107}$$

где τ_0 [см. (4.101)] — время затухания, то же самое, что в (3.105). Уравнение (4.107) справедливо и для более толстых проводников, если вместо τ_0 использовать постоянную времени, задаваемую уравнением (3.103).

Граничное условие, заданное в виде синусоидальной функции

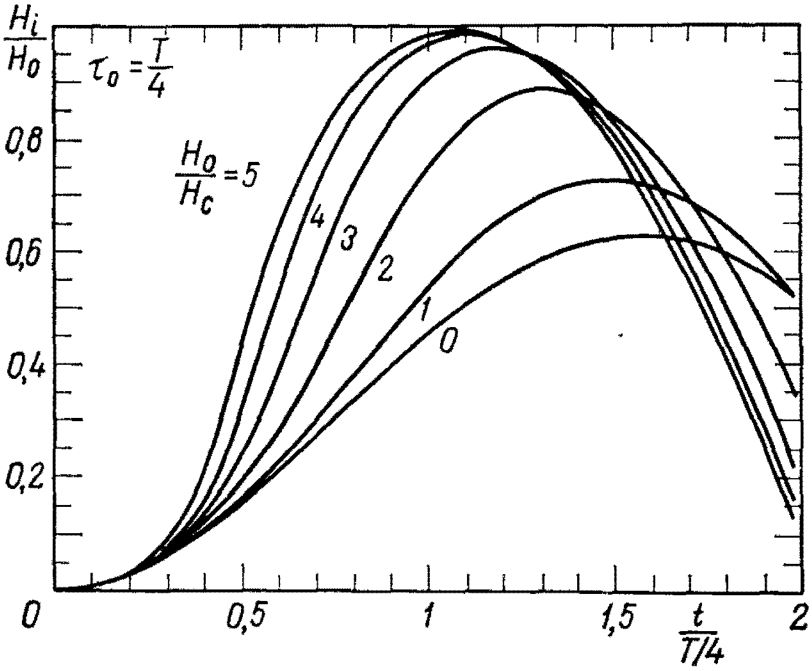
4.30. В том случае, если нестационарное граничное условие имеет вид синусоидальной функции

$$H_e = H_0 \sin \omega t \quad \text{для } 0 \leqslant t < \infty,$$
$$H_e = 0 \quad \text{для } t < 0, \tag{4.108}$$

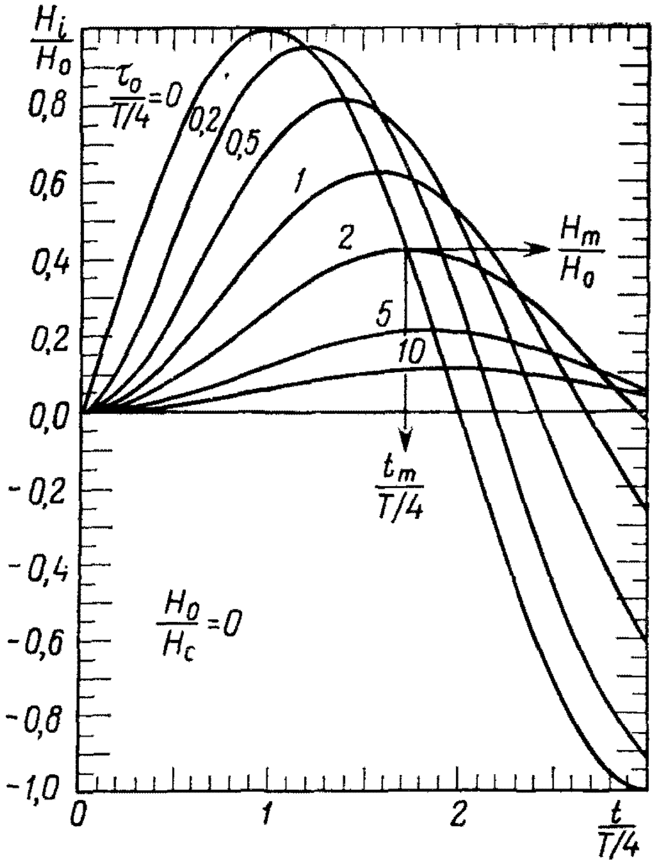
систему уравнений (4.96), (4.98), (4.100) следует решать числовыми методами. Аналогично предыдущему случаю получающиеся результаты являются функциями двух параметров

$$\frac{\tau_0}{{}^1/_4 T} \quad \text{и} \quad \frac{H_0}{H_c},$$

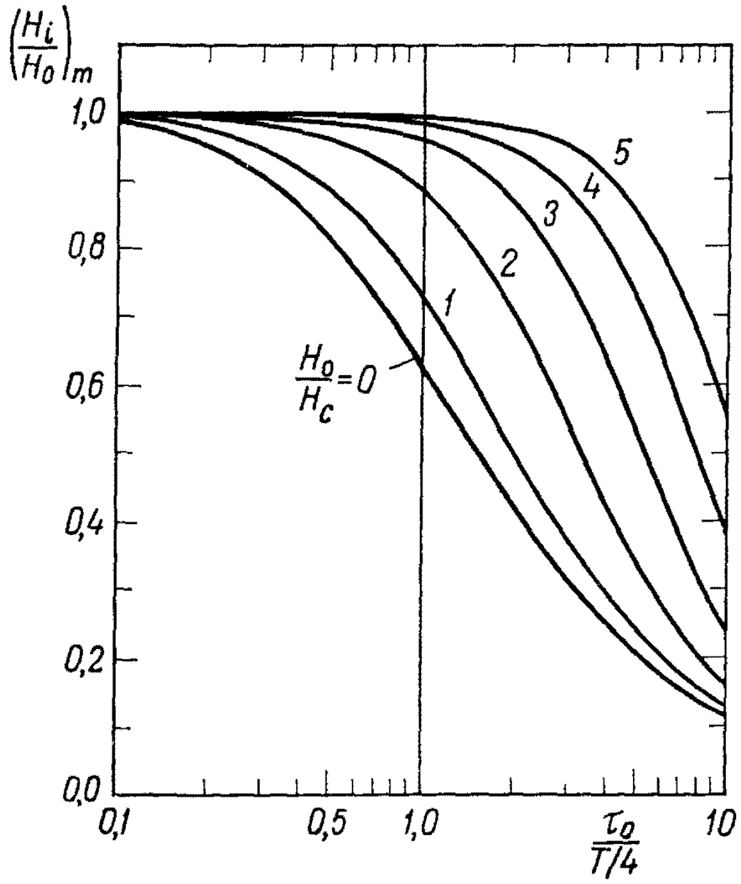
где ${}^1/_4 T$ — четверть периода колебаний поля и H_c — критическое поле, определяемое уравнением (4.99). На фиг. 4.11 изображена зависимость внутреннего поля от времени, соответствующая



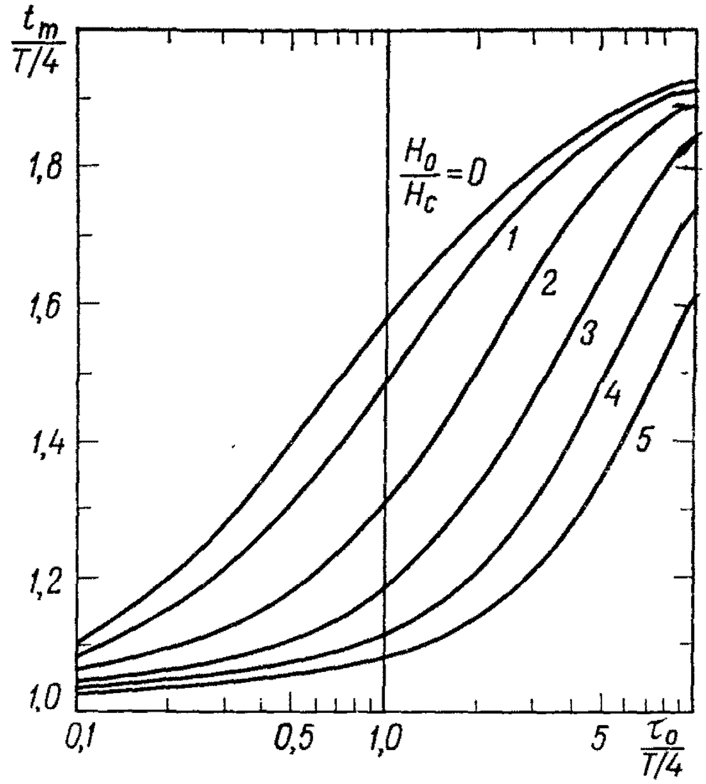
Ф и г. 4.11. Диффузия синусоидального поля в тонкостенный полый проводник при учете температурных эффектов для случая $\tau_0 = {}^1/_4\ T$.



Ф и г. 4.12. Диффузия синусоидального поля в тонкостенный полый проводник при учете температурных эффектов (как и на фиг. 4.11) для частного случая $H_0/H_c = 0$.

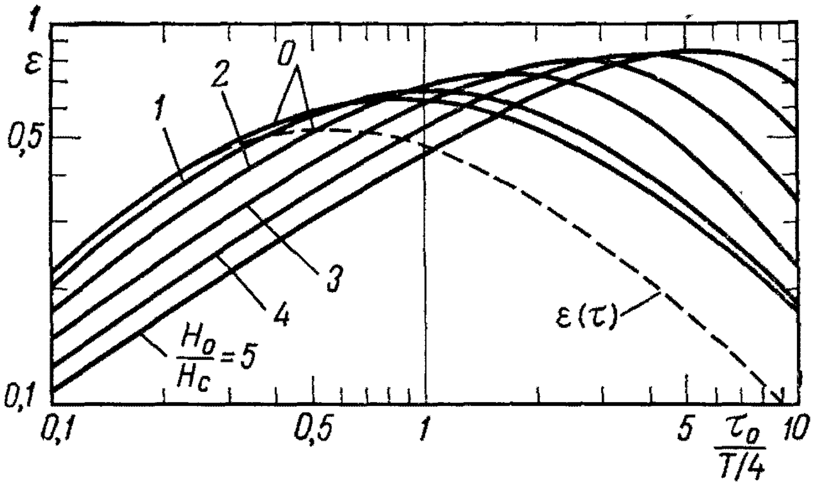


Фиг. 4.13. Изменение максимальной амплитуды H_m диффузионного поля (фиг. 4.11 и 4.12) в зависимости от постоянной времени.



Фиг. 4.14. Изменение момента времени t_m, соответствующего максимуму поля H_m (см. фиг. 4.13).

особому случаю $\tau_0 = {}^1/_4 T$. Для предельного случая $H_0 \ll H_c$ задача может быть решена аналитически, так как $\tau \approx \tau_0$. Результаты в графической форме приведены на фиг. 4.12. Часто интерес представляет только максимальная амплитуда H_m диффузионного поля и соответствующее время t_m; эти значения представлены соответственно на фиг. 4.13 и 4.14.



Ф и г. 4.15. Нормированное значение энергии, рассеиваемой в тонкостенном полом проводнике [уравнение (4.109)].

Пунктирная линия соответствует случаю $H_0/H_C = 0$, но интегрирование выполнялось только до ${}^1/_4 T$ (вместо t_m).

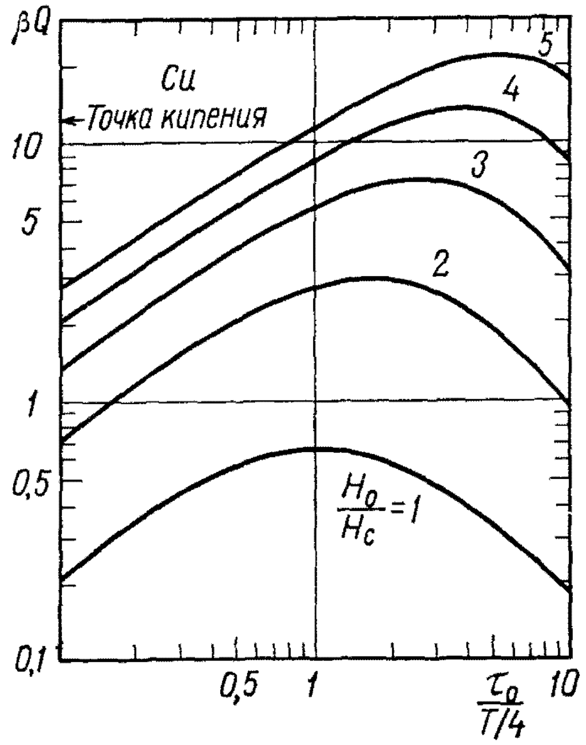
4.31. На практике также важно знать относительную долю рассеиваемой в проводнике энергии ε к моменту времени $t = t_m$. Определим ее как

$$\varepsilon = \frac{2\pi r_0\, dQ}{{}^1/_2 \pi \tau_0^2 \mu_0 H_0^2}$$

и из (4 98) и (4.99) непосредственно находим

$$\varepsilon = \left(\frac{H_c}{H_0}\right)^2 \left\{\exp\left[\frac{2}{\tau_0 H_c^2} \int_0^{t_m} (H_i - H_e)^2\, dt\right] - 1\right\}. \qquad (4.109)$$

Значения ε, получаемые по этой формуле, изображены на фиг. 4.15. Практическое значение этих кривых заключается в следующем. Если для данного источника энергии (конденсаторная батарея) желательно получить максимально возможную величину магнитного поля внутри данного цилиндрического проводника (определяемого τ_0), то необходимо выбирать параметры электрической цепи (т. е. практически индуктивность катушки) таким образом, чтобы период колебаний системы T сильно отличался от значения $\tau_0/(T/4)$, соответствующего максимуму ε. На фиг. 4.16 изображена безразмерная величина количества тепла $\beta c_v \theta$ [уравнение (4.98)] в зависимости от $\tau_0/(T/4)$. Из уравнений (4.98) и (4.99) видно, что для получения очень высоких температур в металле можно использовать систему с полым проводником, так как βQ можно увеличить за счет геометрического параметра $\sqrt{r_0/d}$. Однако нельзя существенно превышать температуру кипения, так как в этом случае



Фиг. 4.16. Безразмерная величина количества тепла в тонкостенном полом проводнике [уравнение (4.98)] для синусоидального внешнего поля.

тонкий проводник взрывается. Поэтому такие эксперименты непосредственно связаны с исследованиями взрывающихся проводников (см. п. 4.19 и [4.9]).

Значение энергетического фактора ϑ [уравнение (4.38)] равно

$$\vartheta = \frac{2c_v\theta}{\mu_0 H_0^2} = \frac{r_0}{2d}\,\varepsilon. \qquad (4.110)$$

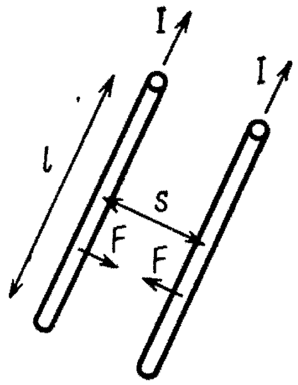
Из фиг. 4.15 видно, что эта величина может быть существенно больше, чем в случае взаимодействия магнитного поля с толстым проводником (п. 4.25).

Пятая глава Давление магнитного поля и связанные с ним эффекты

§ 1. ДАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Закон Био — Савара

5.1. На проводник, по которому протекает ток плотностью $\mathbf{j}$ и который помещен в магнитное поле с индукцией $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, дей-



Фиг. 5.1. Притяжение двух параллельных проводов.

ствует сила на единицу объема (*магнитное напряжение*)

$$\mathbf{F}_M = (\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \tag{5.1}$$

или, в практической системе электрических единиц (дин·см$^{-3}$, А·см$^{-2}$, Гс),

$$\mathbf{F}_M = 0{,}1\ (\mathbf{j} \times \mathbf{B}). \qquad (5.2)^*$$

Из уравнения (5.1) следует, что на элемент линейного проводника $d\mathbf{l}$, по которому протекает полный ток I, действует сила

$$d\mathbf{F} = I\ (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{5.3}$$

(закон *Био — Савара*). Например, два параллельных провода, находящиеся на расстоянии s друг от друга, по которым протекает ток I в одном и том же направлении (фиг. 5.1), притягиваются с силой (на единицу длины)

$$\frac{F}{l}=\frac{\mu}{2\pi}\frac{I^2}{s}, \tag{5.4}$$

определяемой взаимодействием собственных магнитных полей [уравнение (2.26)].

Тензор напряжений Максвелла

5.2. Рассмотрим проводник, к поверхности которого приложено импульсное магнитное поле $H(t)$. Для простоты исследуем плоский случай, когда внешнее магнитное поле параллельно бесконечно тонкому плоскому проводнику (фиг. 3.1). Заменяя в уравнении (5.2)

$$j_y=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{5.5}$$

и производя интегрирование вдоль оси x, получаем выражение для *гидродинамического давления* на глубине x, вызываемого взаимодействием магнитного поля с *несжимаемым* телом,

$$p(x, t)=-\int_0^x \frac{\partial H_z}{\partial x} B_z\, dx = p_H - \frac{1}{2}\mu H^2(x, t), \tag{5.6}$$

где

$$p_H=\frac{1}{2}\mu H^2(0, t) \tag{5.7}$$

представляет давление *магнитного поля* на поверхности. Из (5.6) следует, что градиент давления внутри проводника равен

$$\frac{dp}{dx}=-\mu H\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Анализируя эти уравнения, можно сделать вывод, что полное магнитное давление (по крайней мере, его наиболее важная часть) действует только на определенной глубине проводника, которую в большинстве практических задач можно считать того же порядка, что и s_φ, толщина скин-слоя магнитного потока (определенная в п. 3.12).

5.3. Уравнение (5.6) описывает частный случай сложного распределения сил при воздействии электромагнитного поля на проводник; в общем случае распределение сил может быть найдено с помощью формального метода *тензора напряжений Максвелла*. Используя уравнение (2.8), выражение для объемной силы (5.1) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{F}_M=[(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{B}]=\mu\left[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}-\frac{1}{2}\nabla\mathbf{H}^2\right] \tag{5.8}$$

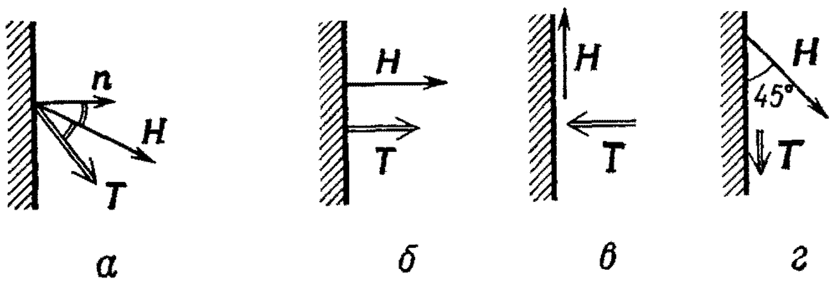
и, совершив ряд векторных преобразований (см. п. П.2.5 или более подробно [5.1]), можно показать, что сила, действующая со стороны магнитного поля, определяется только полем на поверхности проводника. Значение этой силы в интегральной форме задается выражением

$$\mathbf{F} = \oint \mathbf{T}\, ds,$$

где (для $\mu = \text{const}$)

$$\mathbf{T} = \mu \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\, \mathbf{H} - \frac{1}{2} H^2 \mathbf{n} \right]; \tag{5.9}$$

здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Действительно, $\mathbf{T}$ представляет собой вектор, равный произведению $\mathbf{n}$



Ф и г. 5.2. Вектор плотности поверхностной силы магнитного поля; во всех случаях $|T| = {}^1/_2\ \mu H^2$.

на (квазистационарный) *магнитный тензор Максвелла*, определяемый выражением

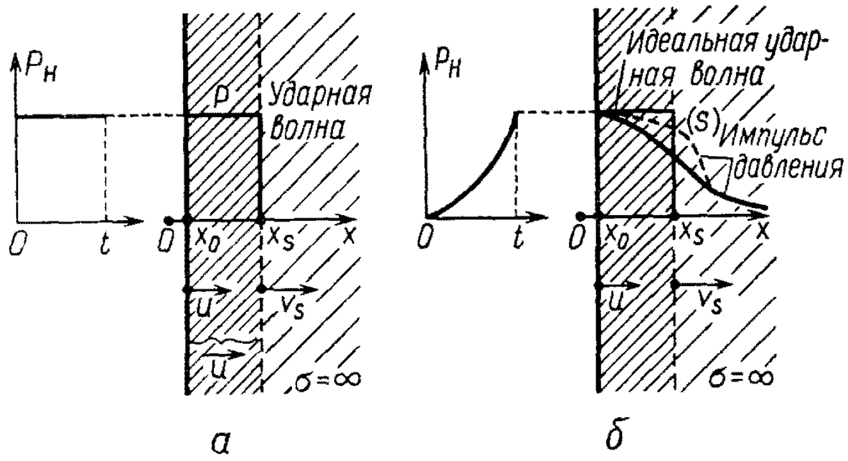
$$T_{ik} = \mu \left\{ H_i H_k - \frac{1}{2}\, \delta_{ik} H^2 \right\}, \quad \text{где} \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3$$

$$\text{и} \quad \delta_{ik} \begin{cases} = 0 \ \text{для} \ i \neq k, \\ = 1 \ \text{для} \ i = k. \end{cases}$$

Анализ уравнения (5.9) показывает, что модуль плотности поверхностной силы $|\mathbf{T}| = {}^1/_2 \mu H^2$ и что вектор $\mathbf{H}$ делит угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{T}$ пополам (фиг. 5.2, *а*). Поэтому в зависимости от ориентации $\mathbf{H}$ можно получить и растяжение проводника вдоль направления поля (фиг. 5.2, *б*), и сжатие перпендикулярно направлению поля [фиг. 5.2, *в* и уравнение (5.7)]; в особом случае, изображенном на фиг. 5.2, *г*, возникает сдвигающее усилие (значение которого всегда равно ${}^1/_2 \mu H^2$). Можно дать качественное объяснение этим результатам, если ассоциировать линии потока магнитного поля с натянутыми эластичными лентами.

Ударные волны

5.4. В том случае, когда нестационарное магнитное поле приложено к поверхности *сжимаемого* проводника, возникает соответствующий импульс гидродинамического давления, который распространяется с конечной скоростью в глубь материала. Если величина напряженности магнитного поля порядка мегаэрстед, а время нарастания порядка микросекунд, то давление на фронте может достичь такого значения, что образуется ударная волна (одна или несколько). В этом случае необходимо также учитывать, что процесс диффузии магнитного поля связан с распределением давления в проводнике. Эта довольно сложная динамическая



Фиг. 5.3. Распределение давления в идеальном проводнике при воздействии на него постоянного магнитного давления (*а*) и импульсного давления (*б*).

задача решается путем использования ряда гидродинамических уравнений совместно с уравнениями Максвелла (как будет показано подробно в гл. 9 и п. П4).

Для лучшего понимания наиболее важных физических эффектов исследуем эту задачу в три этапа. Первоначально предположим, что сжимаемый проводник является идеально проводящей жидкостью ($\sigma = \infty$). Первый этап исследования задачи иллюстрируется на фиг. 5.3, *а*. Здесь изображен плоский проводник, на поверхность которого воздействует постоянное давление магнитного поля

$$p_H = \frac{1}{2}\mu H^2;$$

необходимо найти скорость u, с которой поверхность «вдавливается» в проводящую жидкость. Эта задача аналогична классической задаче об ударной волне (упоминающейся в п. 10.21), в которой поршень движется с постоянной скоростью u в сжимаемой жидкости, однако в том случае скорость u задана и надо найти давление p (или скорость ударной волны v_S). При условии, что p и u остаются одинаковыми во всей области ударной волны (т. е. между свободной границей и фронтом ударной волны), решение для обоих случаев дается соотношением Гюгонио (10.33)

$$p = \rho_0 v_S u \tag{5.10}$$

совместно с эмпирическим законом для скорости (10.40)

$$v_S = c_0 + Su, \tag{5.11}$$

где S — константа вещества, c_0 — скорость звука и ρ_0 — начальная плотность (несжатой) жидкости (табл. 10.1). В нашей задаче u есть скорость движения поверхности, определяемая из равенства

$$u(c_0 + Su)\rho_0 = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{5.12}$$

(u и v_S измеряются относительно несжатой жидкости). В случае относительно слабых ударных волн ($Su \ll c_0$) имеем $u \sim H^2$, в то время как для противоположного случая $u \sim H$. В диапазоне магнитных полей 1,5—10 МЭ и при отклонении профиля давления не более $\pm$ 8% от постоянного (фиг. 5.3, *а*) для медного проводника справедлива приближенная формула $u \approx 1{,}45 \cdot 10^{-5} H^{3/2}$ (см$\cdot$с$^{-1}$, Э).

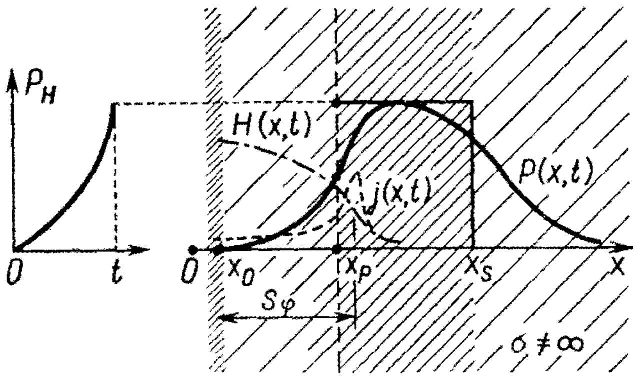
5.5. Если давление p_H (а следовательно, и напряженность магнитного поля H) возрастает со временем, то распределение давления в жидкости, так же как и скорости течения, перестает быть независимым от времени и пространства (фиг. 5.3, *б*); действительно, при особых условиях давление в жидкости может возрасти настолько, что образуется одна или несколько ударных волн (как изображено на фиг. 5.3, *б*, кривая S). Такая динамическая задача может быть решена только методами численного расчета; ее решение определяется кривой $p_H = p_H(t)$. Разнообразные численные расчеты показывают (см. п. 9.19), что уравнение (5.12) тем не менее полезно для грубой оценки скорости движения поверхности u, особенно когда давление $p_H(t)$ после быстрого скачка остается почти постоянным.

5.6. Если рассматривать случай жидкости с конечной электропроводностью, то задача определения давления в веществе становится более сложной, чем раньше, так как необходимо принимать во внимание диффузионное магнитное поле $H(x, t)$. Как было найдено в п. 5.2, для несжимаемого проводника гидродинамическое давление равно

$$p = \frac{1}{2}\mu\,[H^2(0, t) - H^2(x, t)]. \tag{5.13}$$

Для реального, *сжимаемого* проводника (фиг. 5.4) распределение давления существенно не отклоняется от (5.13), но, естественно, ограничивается конечной глубиной. Точный расчет распределения поля и давления в этом случае можно произвести только численно, для него необходимо составить полную систему уравнений магнитной гидродинамики [5.2]. Формулировку этой общей задачи мы обсудим в гл. 9.

Представляется достаточно разумным использовать результаты, полученные ранее (п. 5.5, фиг. 5.3, *б*), применительно к плоскости, находящейся на глубине x_p от поверхности, т. е. к плоскости, в которой давление достигает определенной величины (например, половины от максимальной; фиг. 5.4). Эту плоскость можно рассматривать как поршень, движущийся со скоростью u, приближенное значение которой определяется уравнением (5.12); перед ним следует пик давления (в предельном случае — ударная волна). Следует отметить, что в случае нелинейной диффузии магнитного поля ($H > h_c$), который характеризуется относительно



Фиг. 5.4. Распределение давления в жидкости с конечной электропроводностью.

плоской вершиной продиффундировавшего поля, величина x_p приблизительно равна толщине скин-слоя магнитного потока, т. е. $x_p \approx s_\varphi$.

Приведенные качественные соображения не касаются поведения слоев, лежащих между поверхностью и проходящей через x_p плоскостью. Эти слои тоже смещаются внутрь жидкости, но скорость движения зависит от положения каждого слоя. Следует добавить, что эта часть проводника нагревается за счет диффузии поля, так что возможно испарение поверхности (см. п. 5.19). Однако в большинстве случаев, имеющих практическое значение, толщина поверхностного слоя намного меньше глубины проникновения импульса давления ($x_p \ll x_S$), так что этими поверхностными эффектами можно пренебречь.

В качестве примера рассмотрим случай, когда поле на поверхности задано в виде параболической функции времени (4.68)

$$\frac{H_0}{h_c} = \sqrt{\frac{t}{t_0}}. \tag{5.14}$$

Из (4.72) и (4.82) получаем

$$\frac{ds_\varphi}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dx_p}{dt} \approx \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\varkappa_0}{2t_0}}\,\frac{H}{h_c},$$

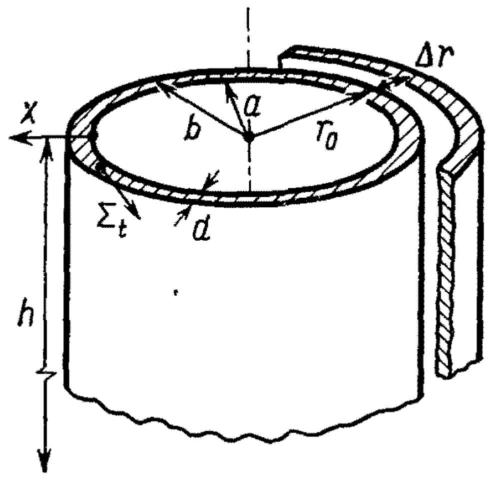
где u и v_S приближенно задаются уравнениями (5.12) и (5.11). Для медного проводника (табл. 10.I и 10.IV) при 5 МЭ и $t_0 = 1$ мкс расчет дает

$$\frac{ds_\varphi}{dt}=0{,}03\ \text{см/мкс},\quad u=0.17\ \text{см/мкс},\quad v_S=0{,}65\ \text{см/мкс}.$$

Видно, что $ds_\varphi/dt \ll v_S$; этот результат подтверждает правильность картины, использующей представление о движущемся «магнитном поршне». Можно сделать вывод, что процессу диффузии и связанным с ней эффектам предшествует сильное сжатие внутренних слоев проводника.

Удержание магнитных полей

5.7. В пределах ограничений, сделанных в предыдущих пунктах, задача механического удержания магнитного поля сводится



Фиг. 5.5. Цилиндрическая оболочка для удержания магнитного поля.

к решению механической задачи по расчету прочности системы. При *статическом удержании* магнитного поля, развивающего давление на поверхности

$$p=p_H=\frac{1}{2}\mu H^2, \tag{5.15}$$

цилиндрической стенкой с радиусами b, a (фиг. 5.5) тангенциальное напряжение максимально на внутренней поверхности, где его значение равно (5.15)

$$\sum = p\,\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}.$$

Для тонкой стенки со средним радиусом r_0 и толщиной $d \ll r_0$, в которой существуют только тангенциальные силы, среднее тангенциальное напряжение равно

$$\sum = \frac{pr_0}{d}\,; \tag{5.16}$$

ТАБЛИЦА 5.1

Механические и электрические характеристики некоторых металлов при 20° С

Металл		Плотность ρ, г/см^3	Прочность на разрыв [1] Σ_t, килопонд/мм^2	Предел текучести Σ_y, килопонд/мм^2	Модуль Юнга Y, килопонд/мм^2	Удельное сопротивление $1/\sigma$, мкОм·см
Сталь (Ag42, UNI743)		7,8	40—50	23	21 100	10
Нержавеющая сталь (AISI304)		8	56—67	25—32	20 300	72
Сталь (AISI9840) (термообработка)		7,9	100—120	85—100	21 000	—
Антикородал (AC-II, UNI3571, TA-16) (термообработка)		2,7	32—38	27—34	7 000	3,2—3,8
Медь	жесткая		35	31		
	полужесткая	8,9	28	21	12 000	1,67
	отожженная		22	7		
Латунь	жесткая		53	12—30		
	полужесткая	8,4	42	12—30	10 000	6,2
	отожженная		36	12—30		
Хидурел (кованый) (Cu — Cr)		8,9	42—46	28—30	12 500	2,1
Бериллиевая бронза (Cu, 1% Be, Co) (термообработка)		8,3	75—80	63—68	11 500	3,4—3,8

[1] Размерности: 1 килопонд/мм^2 = $9,81 \cdot 10^7$ дин/см^2 = $9,81 \cdot 10^6$ Н/м^2.

с другой стороны, согласно *закону Гука*,

$$\sum = \frac{\Delta r}{r_0} Y, \qquad (5.17)$$

где Y — *модуль Юнга*. Следовательно, условие статического удержания магнитного поля запишется в виде

$$\frac{1}{2} \mu H^2 < \Sigma_y \frac{d}{r_0}, \qquad (5.18)$$

где Σ_y — предел текучести (значения Σ_y для различных материалов приведены в табл. 5.I).

Поле текучести определяется соотношением

$$\frac{1}{2} \mu_0 H_Y^2 = \Sigma_y, \qquad (5.19)$$

его практический смысл ясен из рассмотрения уравнения (5.18). Например, для $\Sigma_y = 100$ килопонд/мм^2 находим $H_Y = 500$ кЭ.

5.8. Однако обычно необходимо рассматривать *динамическое удержание* поля, когда важную роль играет инерция материала контейнера. Рассмотрим вначале тонкий цилиндрический контейнер. Если длительность импульса давления $p(t)$ мала по сравнению с периодом собственных колебаний контейнера

$$T_M = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{\rho}{Y}}, \qquad (5.20)$$

то передаваемый на его стенки импульс равен

$$P = 2\pi r_0 h \int_0^t p(t)\, dt, \qquad (5.21)$$

где ρ — плотность. (Период T_M обычно равен 100 мкс для контейнера диаметром 10 см.) Если в результате контейнер расширился на Δr, то справедливо равенство

$$\frac{P^2}{2M} = \int_0^{2\pi\Delta r} \Sigma\, dh\, dx \qquad \left(\Sigma = Y \frac{x}{2\pi r_0}\right), \qquad (5.22)$$

т. е.

$$P = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} M \frac{\Delta r}{r_0}, \qquad (5.23)$$

где

$$M = 2\pi r_0\, dh\rho$$

есть масса контейнера. Поэтому условие *динамического удержания* записывается в виде

$$\frac{1}{2}\mu\int_0^t H^2\,dt < \sqrt{\frac{\rho}{Y}}\,\Sigma_y d. \qquad (5.24)$$

5.9. В качестве примера рассмотрим синусоидальное поле

$$H = H_0 \sin\frac{2\pi}{T}t,$$

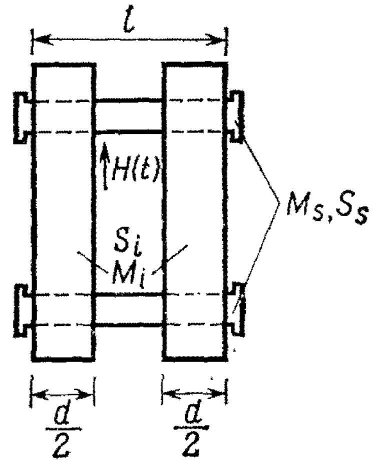
время действия которого ограничивается первым полупериодом. После интегрирования и использования уравнения (5.20) критерий удержания принимает простой вид

$$\frac{1}{2}\mu H_0^2 < \frac{2}{\pi}\frac{T_M}{T}\Sigma_y\frac{d}{r_0}. \qquad (5.25)$$

Поскольку наш расчет основывался на предположении $T \ll T_M$, из (5.25) видно, что динамическое удержание эффективней статического (5.18) в T_M/T раз.

Добавим, что динамическое значение Σ_y несколько больше обычного статического значения, приведенного в табл. 5.I.

5.10. В рассмотренном выше случае материал стенки выполняет одновременно две функции: инерционное удержание и упругое противодействие. Однако чаще всего эти две функции выполняются двумя различными элементами, как в случае передающей



Фиг. 5.6. Передающая линия, состоящая из параллельных пластин.

линии, показанной на фиг. 5.6. *Винты* или *зажимы* длиной l, с общим поперечным сечением S_s и общей массой $M_s = S_s l \rho_s$ представляют собой удерживающий элемент, в то время как инерционная масса M_i определяется массой пластин, имеющих поверхность S_i. Повторяя те же самые рассуждения, что и при выводе уравнения (5.23), для $M_s \leqslant M_i$ находим [5.5]

$$P \approx \sqrt{\frac{Y_s}{\rho_s}} \sqrt{M_s M_i \left(1+\frac{2M_s}{3M_i}\right) \frac{\Delta l}{l}}\,; \tag{5.26}$$

исходя из этого уравнения, приходим к следующему выражению для условия динамического удержания:

$$\frac{1}{2}\mu \int_0^t H^2\,dt < \frac{\Sigma_y^s}{\sqrt{\{\rho_s Y_s\}}} \frac{\sqrt{\left\{M_s M_i \left(1+\frac{2}{3} M_s/M_i\right)\right\}}}{2S_i},$$

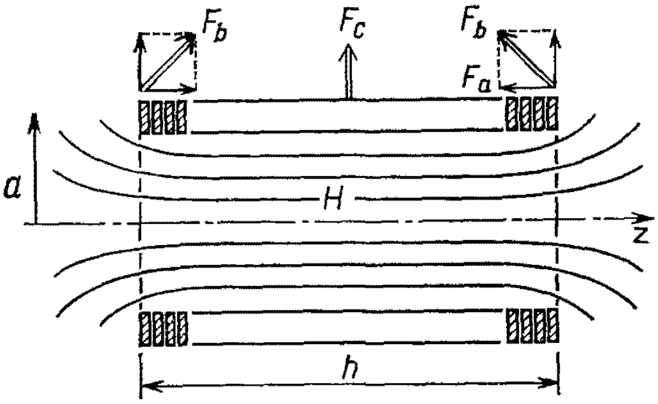
где величины Σ_y^s и Y_s относятся к зажимам.

В пределе $M_s \ll M_i$, $l \approx 2d$ условие удержания можно записать в форме, аналогичной (5.24):

$$\frac{1}{2}\mu \int_0^t H^2\,dt < \sqrt{\frac{\rho_i}{Y_s}}\,\Sigma_y^s\,d \sqrt{\frac{S_s}{S_i}}. \tag{5.27}$$

Силы, действующие на соленоид

5.11. На основе приближенных формул, выведенных в предыдущих пунктах, можно рассчитать силы, действующие на многовитковый соленоид, и определить условия, при которых не происходит его разрушения. В качестве примера рассмотрим одно-



Фиг. 5.7. Силы, действующие на соленоид.

слойную катушку, состоящую из N витков, каждый из которых имеет толщину d и длину s (фиг. 5.7); коэффициент заполнения такой катушки [см. (2.44)] равен

$$f = \frac{Ns}{h}. \tag{5.28}$$

Согласно (5.7), магнитное давление, действующее на витки катушки, равно (при $f \geqslant 0{,}5$)

$$P \approx \frac{1}{2} \frac{\mu H_i^2}{f}, \tag{5.29}$$

где

$$H_f = \frac{NI}{h}. \qquad (5.30)$$

Условия удержания, найденные в пп. 5.7 и 5.8, применимы и для данного случая [с учетом уравнения 5.29)]; например, (5.24) переходит в

$$\frac{1}{2}\mu \int_0^t H_f^2\, dt < \sqrt{\frac{\rho}{Y}}\, \Sigma_y\, df. \qquad (5.31)$$

5.12. Как показано на фиг. 5.7, на витки также действуют осевые силы, стремящиеся сжать катушку. Можно оценить эти силы, используя следующий метод рассуждения. Пусть W — энергия магнитного поля системы проводников; *виртуальное перемещение* δz происходит за счет *виртуальной работы*

$$\delta W = F_a \delta z; \qquad (5.32)$$

здесь F_a — осевая сила, действующая на перемещаемый проводящий элемент. Для соленоида имеем

$$W = \frac{1}{2} L I^2;$$

индуктивность соленоида определяется соотношением

$$L = \mu_0 \frac{\pi a^2}{h} N^2 K_L,$$

где K_L — поправочный множитель, приведенный в виде функции от $h/2a$ на фиг. П1.10. Если положить, что I остается постоянной величиной в процессе смещения ($\delta z = \delta h$), то можно рассчитать

$$\delta W = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial z}\, \delta z = \frac{1}{2} \mu_0 \pi a^2 N^2 \left(-\frac{K_L}{h^2} + \frac{\partial K_L}{h\, \partial z} \right) I^2 \delta z.$$

Для длинной катушки ($h/2a \gg 1$) имеем

$$\frac{\partial K_L}{\partial z} \ll \frac{K_L}{h}$$

(см. фиг. П1.10). Следовательно, для осевой силы, действующей на последний виток, справедливо приближенное выражение

$$|F_a| \approx \frac{1}{2} \mu_0 H_f^2 (\pi a^2) K_L. \qquad (5.33)$$

Таким же образом можно показать, что сила, действующая на промежуточные витки, уменьшается примерно в $(2z/h)^2$ раз, где z — осевое расстояние от витка до средней плоскости. Если при конструировании тщательно не учитывать действие этой сжимающей силы, то крайние витки могут переместиться и, следовательно, может произойти разрушение всей катушки.

5.13. Аналогично предыдущему можно рассчитать силу притяжения (или отталкивания) *двух соленоидов*, находящихся на расстоянии s, каждый из которых имеет длину h, внутренний радиус a и собственную индуктивность L_0 (фиг. П1.16). Так как индуктивность равна $L = 2(L_0 \pm M)$ (где M — взаимная индуктивность, см. п. П1.15), виртуальная работа определяется выражением ($\delta s = \delta z$)

$$\delta W = \pm 2 \frac{\partial M}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} I^2 \delta z = F_a \delta z. \tag{5.34}$$

Множитель $\partial M/\partial z$ можно рассчитать с помощью уравнения (П1.21) и фиг. П1.10.

Если две катушки можно приближенно рассматривать как два витка, в каждом из которых течет полный ток NI (т. е. если $h \ll s$), то выражения значительно упрощаются. Действительно, в случае $a \gg s$ из уравнения (5.4) получаем

$$|F_a| \approx \mu (NI)^2 \left(\frac{a}{s}\right).$$

В другом предельном случае $a \ll s$ из (5.3) и (2.59) следует

$$|F_a| \approx 2\pi a \mu (NI) H_r \approx \pi \mu (NI)^2 \left(\frac{a}{s}\right)^3.$$

Проводники без силовой нагрузки

5.14. Согласно (5.1), проводник не будет иметь силовой нагрузки в том случае, если повсеместно выполняется равенство

$$\mathbf{j} \times \mathbf{H} = 0, \tag{5.35}$$

т. е.

$$\mathbf{j} = \alpha \mathbf{H},$$

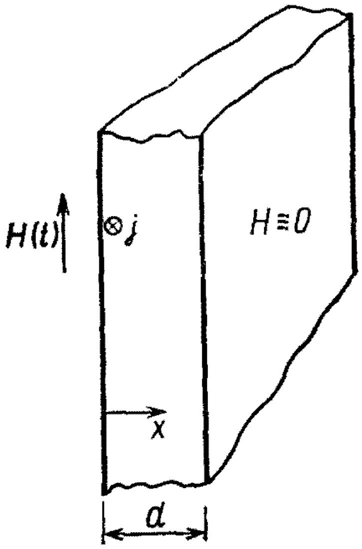
где α — скалярная функция [5.6].

Можно показать [5.7], что в строгом смысле условия отсутствия силовой нагрузки могут существовать только для бесконечных систем; другими словами, для конечных проводящих систем всегда имеют место конечные локальные силы. Поэтому задача сводится, например, к нахождению способа уменьшения электромагнитных сил в определенной области пространства или к определению подходящего расположения этих сил [1.6, 7.16б]. Такие задачи могут быть решены при использовании расчетных методов, описанных в гл. 2 (см. [1.5, 1.19]).

§ 2. ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОГО ПРОВОДЯЩЕГО ЛИСТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Кинематика движения листа

5.15. В последующих пунктах будет рассмотрено движение металлического проводника в результате действия давления магнитного поля и дан анализ зависимости процесса ускорения



Фиг. 5.8. Плоский лист.

от различных физических эффектов, вызванных магнитным полем (таких, как нагрев, испарение и т. д.).

Начнем с того, что напишем уравнение движения для листа толщиной d, сделанного из материала с плотностью ρ (фиг. 5.8), на одну сторону которого воздействует давление магнитного поля (5.7):

$$d\rho \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \mu H^2. \tag{5.36}$$

5.16. Вначале рассмотрим случай постоянного магнитного поля $H = H_0$. Интегрирование уравнения (5.36) дает

$$x = v_A^2 \frac{t^2}{4d}; \tag{5.37}$$

здесь введена *альфвеновская скорость*

$$v_A = H \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tag{5.38}$$

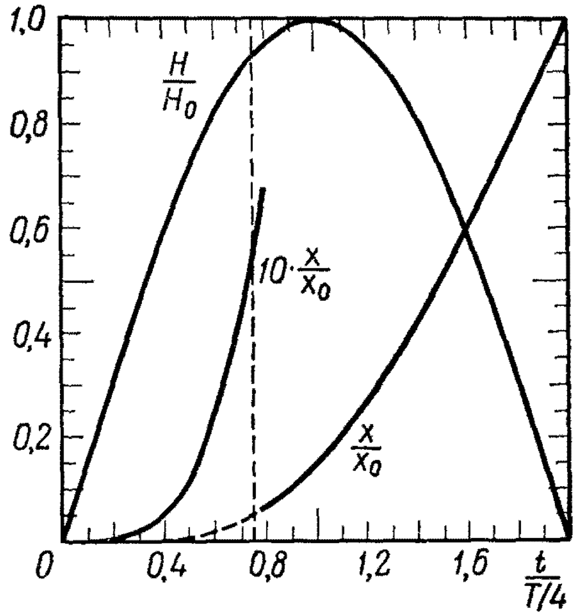
или, в практической системе электрических единиц,

$$v_A = \frac{H}{2\sqrt{(\pi\rho)}}. \tag{5.38*}$$

Это скорость, при которой плотность кинетической энергии движения жидкости (или металла) равна плотности магнитной энергии. Из (5.37) следует, что время, необходимое для смещения листа на четверть его толщины, равно

$$\tau = \frac{d}{v_A}.$$

Обобщая этот результат на случай соленоида, можно сказать, что такая система (при толщине проводников d) почти не изменит



Фиг. 5.9. Ускорение листа под действием синусоидального поля.

свою форму в течение времени порядка

$$\tau \approx \frac{d}{v_A}. \tag{5.39}$$

5.17. Рассмотрим теперь граничное поле

$$H_{(t)} = H_0 \sin \frac{2\pi t}{T}. \tag{5.40}$$

Тогда из (5.36) найдем

$$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{t}{{}^1/_2 T}\right)^2 - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \frac{2\pi}{T} t, \tag{5.41}$$

где

$$x_0 = \frac{v_A^2}{8d} \left(\frac{T}{2}\right)^2 \tag{5.42}$$

представляет собой смещение к концу первого полупериода (фиг. 5.9). Эта формула с достаточной степенью точности описывает смещения листов в цепи конденсаторной батареи до тех пор, пока при движении сохраняется постоянство индуктивности цепи. Так как $H_0 \sim I_0 \sim U_0 \sqrt{C/L}$ и $T \sim \sqrt{LC}$, где U_0 — зарядное напряжение, C — емкость цепи, L — индуктивность цепи (см. гл. 6), находим, что $x_0 \sim CU_0^2\, {}^1/{}_2 C$. Это означает, что смещение x_0 пропорционально не только энергии конденсаторной батареи, но также и емкости.

В начале разряда, когда имеет место *линейная* временна́я зависимость напряженности магнитного поля

$$H = H_0 \frac{2\pi}{T} t,$$

смещение определяется выражением

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{{}^1/{}_2 T} \right)^4 .$$

Тепловое ограничение скорости для тонких листов

5.18. Во время процесса ускорения внешнее магнитное поле постепенно диффундирует в лист, в результате чего возрастает температура листа, которая может даже достичь значения температуры испарения. Этот эффект ограничивает максимальные скорости, которые могут быть получены с помощью сплошных листов.

Максимальную скорость для *тонкого листа* (толщиной d, малой по сравнению с толщиной скин-слоя магнитного потока) определить довольно легко. Перепишем (5.36) с помощью выражения для постоянной плотности тока

$$jd = i = -H \tag{5.43}$$

и, проинтегрировав его, получим выражение для скорости перемещения листа v

$$\frac{v}{d} = \frac{\mu}{2\rho} J, \tag{5.44}$$

где

$$J = \int_0^t j^2\, dt \tag{5.45}$$

есть интеграл тока, определенный в п. 4.19. Как известно из (4.57), эта функция зависит только от начального и конечного состояний (температуры) проводника. Если в (5.44) ввести значение J_{lb}, соответствующее точке плавления металла (см. табл. 4.III), то найдем максимальную скорость v_{lb}, которая может быть получена с помощью простых лайнеров независимо от формы импульса магнитного поля. В этом отношении наилучшим металлом является алюминий, как видно из табл. 5.II. Из этой таблицы

ТАБЛИЦА 5.II

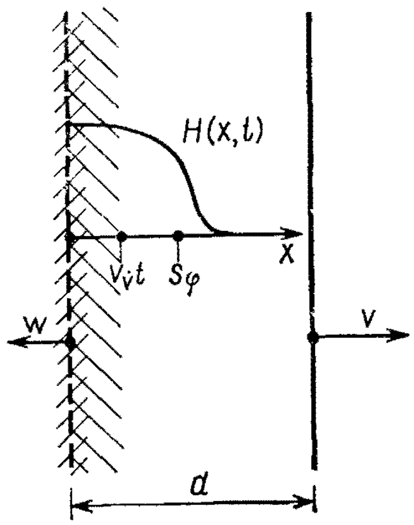
Максимальная скорость движения тонких листов

Металл	ρ, 10^3 кг/м^3	J_{lb} [9.22, 4.5], 10^{17} А$^2\cdot$с$\cdot$м$^{-4}$	v_{lb}/d, 10^6 с$^{-1}$
Al	2,7	0,59	13,7
Cu	8,9	1,24	8,8
Ag	10,5	1	6
Pb	11,3	0,6	3,5
Fe	7,8	0,7	2

также следует, что плотность кинетической энергии, соответствующая максимальной скорости, достигаемой, например, с помощью тонкого (толщиной 0,1 см) медного листа, равна 340 кДж/см^3.

Эффект разрушения поверхности в случае толстых проводников

5.19. Ускорение *«толстого» проводника* под действием сверхсильных магнитных полей представляет собой более сложный процесс, чем в случае «тонкого» проводника. Из п. 5.4 известно,



Ф и г. 5.10. Испарение поверхности толстого листа.

что при воздействии на проводник сверхсильного импульсного поля внутрь проводника начинает двигаться *волна давления*, за которой следует *продиффундировавшее поле*. Существует и третий эффект, *волна испарения*, который мы здесь и рассмотрим. Действительно, температура поверхности, к которой приложено магнитное поле, может в конце концов превысить точку кипения металла, после чего произойдет вскипание поверхности (фиг. 5.10). При расширении перегретого металла резко уменьшается его электропроводность, и эта часть проводника перестает быть связанной с магнитным полем. На следующем этапе возможно образование *электрического разряда* по парам металла, но этот эффект мы не будем здесь рассматривать. Волна испарения влияет на движение проводника двояким образом: 1) она постепенно уменьшает массу, которую необходимо ускорять; 2) расширение перегретого металла сообщает проводнику дополнительный импульс, который способствует процессу ускорения.

Если через $m(t)$ обозначить массу несжимаемого проводника на единицу поверхности, ускоряемую до скорости v, и если w — скорость расширения испарившегося металла проводника, то уравнение движения записывается в виде

$$\frac{d(mv)}{dt}+\frac{dm}{dt}(w-v)=\frac{1}{2}\mu H^2; \tag{5.46}$$

после дифференцирования и разделения переменных оно переходит в уравнение

$$dv=\left[-\frac{dm}{dt}w+\frac{1}{2}\mu H^2\right]\frac{dt}{m}. \tag{5.47}$$

5.20. Если волна испарения распространяется внутрь металлического листа с постоянной скоростью v_v, то ускоряемая масса уменьшается согласно выражению

$$m(t)=\rho(d-v_v t). \tag{5.48}$$

Тогда в особом случае $H=H_0$ (const), интегрируя (5.47), получаем выражение для массовой скорости движения металла

$$v=\left(w+\frac{v_A^2}{2v_v}\right)\ln\frac{m_0}{m(t)}, \tag{5.49}$$

где $m_0=\rho d$ — первоначальная масса, v_A — альфвеновская скорость (5.38).

Предположим, что на фронте волны испарения металл под воздействием продиффундировавшего магнитного поля нагревается до постоянной температуры

$$c_v\theta\approx\frac{1}{2}\mu H_0^2 \tag{5.50}$$

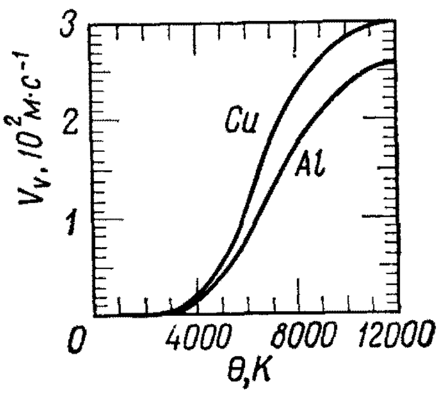
(см. п. 4.25). Эта температура определяет (постоянную) скорость v_v (фиг. 5.11) и скорость расширения w. Действительно, если, например, величину w принять равной средней тепловой скорости

$$\frac{1}{2} w^2 \frac{\rho}{n} \approx \frac{3}{2} k\Theta,$$

то

$$w \approx \sqrt{\frac{3}{2} \frac{kn}{c_v} v_A}, \tag{5.51}$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг·град$^{-1}$ — *постоянная Больцмана*, n — число атомов металла в 1 см^3. Для алюминия расчет дает $w = 1{,}2 v_A$, и при поле 5 МЭ $v_A = 0{,}86$ см·мкс$^{-1}$. Поэтому обычно «реактивным» эффектом можно пренебречь.



Фиг. 5.11. Теоретическая зависимость скорости волны испарения от температуры [5.14].

Ограничение скорости для толстых листов

5.21. Процесс ускорения описывается уравнением (5.49) до момента времени t_f, когда фронт волны диффузии магнитного поля достигает противоположной поверхности проводника. Если глубина проникновения поля значительно больше глубины разрушения поверхности, можно написать приближенное равенство

$$d \approx s_\varphi (t_f), \tag{5.52}$$

где v_v — постоянная скорость волны испарения, s_φ — толщина скин-слоя магнитного потока, которая для постоянного магнитного поля H_0 равна (табл. 4.IV)

$$s_\varphi (t) \approx 0{,}8 \frac{H_0}{h_c} \sqrt{\varkappa_0 t}. \tag{5.53}$$

Здесь h_c — критическое поле, $\varkappa_0$ — коэффициент диффузии проводника. Процессы, происходящие в остающейся к моменту времени t_f массе металла толщиной s_φ, зависят от различных параметров (через время t_f), главным образом от температуры θ. Действительно, если θ ниже температуры испарения θ_{lb}, то скорость движения листа возрастает до величины, приближенно определяемой формулой (5.44) [интеграл тока (4.57) в уравнении (5.44) берется в пределах θ и θ_{lb}]. Если же $\theta \gg \theta_{lb}$, то волна испарения начнет распространяться также с фронтальной поверхности, что приведет просто к взрыву проводника.

5.22. Чтобы вывести соотношение для максимально достижимой скорости, положим (как и ранее), что глубина проникновения поля намного больше глубины разрушения поверхности, т. е. $v_v t_f/d \ll 1$, тогда из (5.52) получаем

$$t_f \approx \frac{d^2}{0{,}64\varkappa_0 (H_0/h_c)^2}. \tag{5.54}$$

Это предположение, по-видимому, вполне допустимо по крайней мере для магнитных полей меньше 2МЭ и больше 5МЭ, так как при низких температурах $v_v \approx 0$, а при высоких температурах значение скорости испарения стремится к постоянной величине (см. фиг. 5.11). В этом случае выражение (5.49) можно упростить:

$$v \approx v_A^2 \frac{t}{2d}\left(1 - \frac{v_v t}{2d}\right). \tag{5.55}$$

Чтобы получить значение максимальной скорости движения толстого листа, ускоряемого постоянным полем H_0, введем в это выражение время t_f и получим приближенное соотношение

$$\frac{v}{d} \approx 0{,}8\mu \frac{h_c^2}{\rho\varkappa_0}. \tag{5.56}$$

Отметим, что выражение для максимальной скорости в приближении первого порядка [$v_\varkappa \ll (H_0/h_c)^2 \varkappa_0 d$] не зависит от магнитного поля и формально очень сходно с выражением для тонкого листа. Для алюминия значение максимальной скорости достигает $v \approx \approx 9{,}6 \cdot 10^6 d$ (м$\cdot$с$^{-1}$), т. е. меньше, чем скорость тонкого листа $v \approx \approx 13{,}7 \cdot 10^6 d$ (м$\cdot$с$^{-1}$).

Ускорение макрочастиц

5.23. Ускорение частиц массой от миллиграмма до грамма (которые мы будем называть *макрочастицами*, или *макронами*) до скоростей свыше 1 см/мкс представляет интерес с точки зрения получения больших концентраций энергии. Наиболее известным и эффектным примером может служить струя, вылетающая из заряда с кумулятивной выемкой, которая при определенных экспериментальных условиях может достигать скорости более 5 см/мкс для бериллия [5.8]. Быстрые частицы (со скоростью до 5 см/мкс) использовались в опытах по изучению образования кратеров, имитирующих столкновение микрометеоритов с космическими кораблями. Частицы достаточно больших размеров, движущиеся со скоростью 50 см/мкс и выше, при столкновении с твердой мишенью из смеси дейтерия и трития могут вызвать реакцию автокаталитического плавления, что открывает интересные возможности для мирного использования ядерной энергии.

Различные методы ускорения частиц

5.24. Классической установкой для ускорения макрочастиц является обычная винтовка. Однако в этом случае конечная скорость пули ограничена тепловой скоростью продуктов сгорания, которая составляет около 0,1 см/мкс; максимальная скорость может быть увеличена на порядок, если в качестве ускоряющего газа использовать водород. Было предложено много других процессов ускорения [5.9]; все они имеют предел максимально достижимой скорости, который составляет менее 10 см/мкс (по крайней мере из практических соображений).

В качестве примера рассмотрим вначале ускорение частицы массой m и зарядом q в электрическом поле E. Уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt}=qE \tag{5.58}$$

для сферической частицы радиусом a и плотностью ρ преобразуется в

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{3\varepsilon_0}{4\pi}\frac{E_0E}{\rho a}, \tag{5.59}$$

где

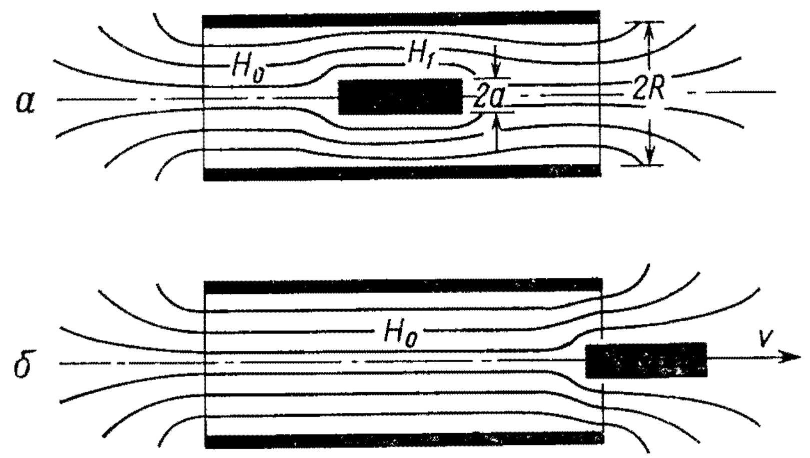
$$E_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2} \tag{5.60}$$

— напряженность электрического поля на поверхности, ε_0 — диэлектрическая постоянная. Для отрицательно заряженного макрона величина E_0 ограничена значением $E_0^- \leqslant 10^7$ В/см за счет автоэлектронной эмиссии, в то время как для положительно заряженной частицы напряженность поля ограничивается величиной $E_0^+ \leqslant 10^8$ В/см за счет предельной прочности на разрыв [5.10]. Из (5.59) следует, что этот метод больше всего подходит для ускорения малых частиц. Например, макрон радиусом $a = 10^{-4}$ см, $\rho = 3$ г$\cdot$см$^{-3}$ и $E_0 = 10^8$ В/см ускоряется мегавольтным электростатическим ускорителем до скорости 1 см/мкс (около 1 эВ на нуклон).

Скорость при ускорении в магнитном поле

5.25. Ускорение проводящих частиц по многим причинам удобнее производить с помощью магнитных полей, а не электрических, хотя и в этом случае имеет место ограничение для скорости (как было видно из предыдущих пунктов, в связи с рассматривавшимся движением проводящих листов).

Сначала рассмотрим простую систему, изображенную на фиг. 5.12: цилиндрический снаряд из идеально проводящего материала радиусом a выталкивается магнитным полем, находящимся



Фиг. 5.12. Выталкивание снаряда магнитным полем, находящимся внутри полого (соленоидального) проводника.

внутри идеального полого проводника. Если пренебречь краевыми эффектами, то баланс энергии до и после вылета снаряда из соленоида может быть записан следующим образом:

$$\frac{1}{2}\mu H_1^2\pi(R^2-a^2)-\frac{1}{2}\mu H_0^2\pi R^2=\frac{1}{2}\pi a^2\rho v^2,$$

где R — радиус соленоида, внутри которого сосредоточен магнитный поток. Используя это выражение, определяем скорость снаряда

$$v=\frac{v_A}{\sqrt{(1-a^2/R^2)}}. \tag{5.61}$$

Если $a/R \ll 1$, т. е. имеется постоянное поле $H_1 \approx H_0$, конечная скорость не зависит от размера частицы и равна альфвеновской скорости (5.38).

Ускорение частиц за счет пространственного изменения магнитного поля

5.26. Более высокие скорости движения частиц могут быть достигнуты путем резонансного ускорения частиц с помощью движущейся магнитной волны. Эта ситуация могла бы быть изображена на фиг. 5.12, *б*, если бы конфигурация поля следовала за частицей со скоростью v, равной скорости частицы, т. е. поле было бы «привязано» к частице. В этом случае уравнение движения можно записать в виде [1])

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}=(\mathbf{m}_d\cdot\nabla)\,\mathbf{B}, \tag{5.62}$$

где $\mathbf{m}_d$ — магнитный дипольный момент диамагнитного снаряда массой m, вызванный наведенными внешним полем токами.

В случае однородного поля $\mathbf{H}_\infty$ было найдено, что, например, для идеально диамагнитного шара радиусом a магнитный дипольный момент равен [уравнение (2.23)]

$$\mathbf{m}_d=-\frac{1}{2}a^3\mathbf{H}_\infty. \tag{5.63}$$

5.27. Согласно определению (П2.19), аксиальная составляющая магнитной силы равна $F_z=\mathbf{m}_d\cdot\nabla B_z$. Если, кроме того, вектор магнитного момента строго аксиален, то $F_z=m_d\,\partial B_z/\partial z$ и для магнитной силы можно формально записать

$$F_z=\frac{1}{2}\delta\pi a^2\mu H^2, \tag{5.64}$$

где δ — *геометрический фактор качества*. Например, для шара, находящегося у отверстия длинного соленоида радиусом R и длиной h (аналогично снаряду на фиг. 5.12, *б*), имеем

$$\delta\approx\frac{a}{\pi h}. \tag{5.65}$$

Действительно, из уравнения (П1.10) и фиг. П1.7 находим

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial z}\right]_{z=1/2h}\approx-\frac{1}{2}H_f\,\frac{d(\cos\vartheta_1)}{dz}$$

и, поскольку

$$\cos\vartheta_1=\left(\frac{1}{2}h-z\right)\left[\left(\frac{1}{2}h-z\right)^2+R^2\right]^{-1/2},$$

получаем

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial z}\right]_{z=1/2h}\approx\frac{H_f}{h}, \tag{5.66}$$

где H_f задается уравнением (5.30). Тогда сферическая частица, ускоренная постоянной силой (5.64) на пути длиной l, приобретает запас энергии

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^2\rho v^2=\frac{1}{2}l\delta\pi a^2\mu H^2.$$

---

[1]) В общем случае потенциал диполя равен $-\mathbf{m}_d\cdot\mathbf{B}$, следовательно, магнитная сила $\mathbf{F}=\nabla(\mathbf{m}_d\cdot\mathbf{B})$, однако с помощью уравнения (П2.18) можно показать, что выражение для силы, действующей на диполь в неоднородном магнитном поле в свободном пространстве ($\nabla\times\mathbf{H}=0$), может быть задано в простой форме уравнением (5.62), если относительная ориентация поля и диполя не меняется. В пределах сделанных допущений эта запись выражения для магнитной силы эквивалентна записи, введенной в п. 5.3.

откуда найдем конечную скорость частицы

$$v = v_A \sqrt{\left(\frac{3}{4}\frac{\delta l}{a}\right)}. \tag{5.67}$$

Можно получить более высокие скорости снаряда, если вместо сферы выбрать более подходящую геометрическую форму, т. е. использовать тела с бóльшим дипольным моментом на единицу массы, как, например, тор или соленоид.

Ограничения скорости за счет диффузии поля

5.28. По мере проникновения магнитного поля в металлический снаряд дипольный момент снаряда постепенно уменьшается и в конце концов этот эффект ограничивает максимально достижимую скорость.

Суммируя линейную и нелинейную части толщины скин-слоя магнитного потока (табл. 4.II и 4.IV), получаем приближенное выражение

$$s_\varphi \approx \left(1{,}1 + \frac{0{,}8H_0}{h_c}\right)\sqrt{\varkappa_0 t}, \tag{5.68}$$

где h_c — критическое поле, $\varkappa_0$ — коэффициент диффузии проводника. Из требования $s_\varphi < a$ (a — половина толщины снаряда) вытекает ограничение на время ускорения

$$t < \frac{a^2}{\varkappa_0\left(1{,}1 + \frac{0{,}8H_0}{h_c}\right)^2} \tag{5.69}$$

и аналогично на максимальную длину ускорителя и максимальную скорость v.

5.29. Для сферического проводника с постоянным усредненным геометрическим фактором качества δ (учитывающим постепенное уменьшение магнитного момента) уравнение движения принимает вид

$$\frac{4}{3}\pi a\rho\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\delta\pi a^2\mu H_0^2. \tag{5.70}$$

Интегрируя его и используя выражение для времени (5.69), получаем предельное соотношение для максимальной скорости

$$v < 0{,}4\mu\frac{a\delta h_c^2}{k_0\rho}\left(1{,}1\frac{h_c}{H_0} + 0{,}8\right)^{-2}. \tag{5.71}$$

Таким образом, выражение, полученное с учетом диффузионных эффектов для обычных (не сверхпроводящих) снарядов [5.11, 5.12], позволяет сделать вывод, что для процесса ускорения удобны поля свыше 1 МЭ. При еще более высоких полях $H_0 \gg h_c$ скорость уже не зависит от поля, и поэтому можно выбирать наиболее подходящее значение для поля. Например, для снаряда из меди при $\delta = 1$ и $a = 0{,}5$ см получаем $v \leqslant 4$ см/мкс. Дополнительный импульс, вызванный разрушением («смыванием») поверхности проводника, может несколько увеличить указанное значение, но обычно этот вклад незначителен (см. п. 5.20).

§ 3. НАПРАВЛЕННЫЙ ВНУТРЬ ВЗРЫВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

5.30. Направленный внутрь взрыв *цилиндрической* (*листовой*) *оболочки*, ускоряемой наружным магнитным полем, используется в различных экспериментах, главным образом для *концентрации* энергии. По сравнению с ускорением плоского листа взрывное сжатие цилиндрической оболочки характеризуется следующими особенностями: 1) *ограниченной длительностью* процесса, определяемой временем, которое требуется для сжатия проводника до оси; 2) *минимальным значением давления*, необходимым для преодоления структурной прочности цилиндрической оболочки; 3) *рассеиванием энергии*, обусловленным деформацией схлопывающегося цилиндра.

Поскольку нас здесь интересуют тонкие проводники ($d \ll r_0$) и относительно большие поля [порядка величины поля текучести, определенного в уравнении (5.19)], можно пренебречь эффектами, упомянутыми в двух последних пунктах. В гл. 9 мы более подробно остановимся на динамике направленного внутрь взрыва.

Общие уравнения

5.31. Рассмотрим цилиндрическую оболочку, присоединенную к конденсаторной батарее (два возможных способа присоединения изображены на фиг. 5.13 и 5.14). Если пренебречь силами сцепления, то взрывное сжатие оболочки в обоих случаях описывается уравнением движения

$$-m\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{1}{2}\mu H^2 2\pi r, \tag{5.72}$$

где $m = 2\pi r_0 d_0 \rho$ — масса несжимаемой оболочки на единицу длины. В случае, приведенном на фиг. 5.14, соотношение между магнитным полем и полным током I имеет вид [уравнение 2.26)]

$$H=\frac{1}{2\pi}\frac{I}{r}, \tag{5.73}$$

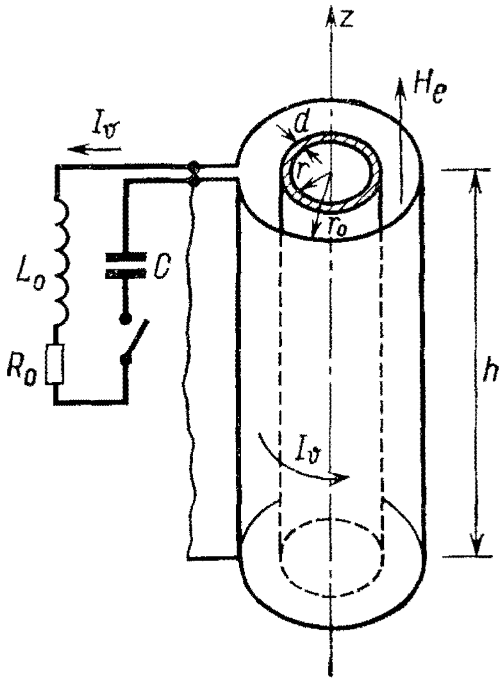
в то время как для ϑ-сжатия (фиг. 5.13) при относительно большой длине катушки ($h \gg r$) оно равно

$$H = H_f = \frac{I}{h}. \tag{5.74}$$

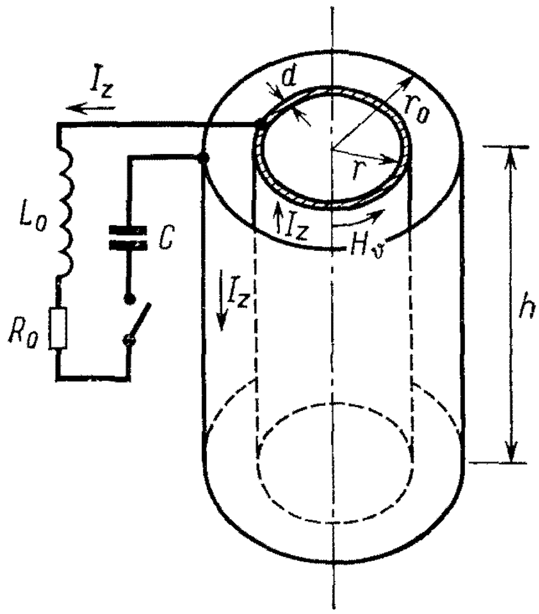
5.32. Уравнение движения связано через (5.73) и (5.74) с общим уравнением цепи

$$\frac{d^2(LI)}{dt^2} + \frac{d(RI)}{dt} + \frac{I}{C} = 0, \tag{5.75}$$

где и индуктивность L, и сопротивление R содержат зависящую от времени компоненту, определяемую динамикой взрывного сжатия. Эта задача может быть решена только численными методами,



Фиг. 5.13. Геометрия ϑ-сжатия.



Фиг. 5.14. Геометрия z-сжатия.

даже если сопротивление пренебрежимо мало, т. е. $R \ll \sqrt{L/C}$. Однако в последнем случае решение задачи может быть сведено к нахождению двух безразмерных параметров и, следовательно, отчасти обобщено [5.13]. К сожалению, на практике пренебречь сопротивлением цепей можно только в редких случаях.

Решение для частного случая постоянного тока

5.33. Чтобы получить грубое представление о динамике взрывного сжатия для двух указанных схем подключения оболочки, рассмотрим идеализированный случай, в котором ток, протекающий по цепи, остается постоянным ($I = I_c$), т. е. мы пренебрегаем уравнением (5.75).

Сначала рассмотрим z-сжатие, для которого, используя (5.72) и (5.73), получаем уравнение

$$r\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\mu}{4\pi}\frac{I_c^2}{m}; \tag{5.76}$$

при начальных условиях $t=0$, $r=r_0$, $v_0=0$ это уравнение легко интегрируется [с использованием соотношения $dv/dt = v\,(dv/dr)$]:

$$v^2 = \frac{\mu}{8\pi}\frac{I_c^2}{m}\ln\frac{r_0}{r}. \tag{5.77}$$

Конечная скорость соответствует моменту, когда оболочка полностью сжимается, т. е. превращается в цилиндр с (наружным) радиусом r_f

$$\pi r_f^2 \approx 2\pi r_0 d_0. \tag{5.78}$$

Конечную скорость

$$|v_f| \approx \sqrt{\frac{\mu}{16\pi}}\,I_c\left(\frac{1}{m}\ln\frac{r_0}{2d_0}\right)^{1/2}, \tag{5.79}$$

получающуюся из уравнения (5.77) с помощью подстановки $r \to r_f$, необходимо сравнить с максимальным значением [уравнение (5.44)]

$$\frac{v_m}{d_0} \approx \frac{\mu}{2\rho} J_{lb}, \tag{5.80}$$

которое приблизительно верно в этой форме и для цилиндрической геометрии. Из сравнения (5.80) и (5.79) можно найти оптимальные параметры цепи и размеры металлической фольги.

5.34. Для случая ϑ-сжатия при тех же условиях используем уравнение (5.72) и (5.74) и получим

$$\frac{d^2r}{dt^2} + A^2 r = 0, \quad A = \sqrt{\frac{\pi\mu}{m}}\frac{I_c}{h}; \tag{5.81}$$

решение имеет вид

$$r = r_0 \cos At,$$

$$|v| = r_0 A \sin At. \tag{5.82}$$

Конечная скорость $v_f \approx r_0 A$, как и следовало ожидать, оказалась меньше, чем в предыдущем случае [уравнение (5.79)].

Выражения, полученные для обоих случаев, приближенно верны также и при осциллирующих токах, когда ток, по крайней мере один раз, изменяет полярность; необходимо только заменить I^2 его средним значением. Например, при синусоидальной форме тока $I = I_m \sin\omega t$ получаем для $t_f > 2\pi/w$, т. е. $\omega > 4A$, новое значение

$$A = \sqrt{\frac{\pi\mu}{m}}\frac{I_m}{h\sqrt{2}}.$$

Шестая глава Импульсные генераторы тока обычного типа

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

6.1. Проблема генерации мощных импульсов тока для получения сильных магнитных полей в первую очередь сводится к созданию подходящих источников энергии, которые должны

а) запасать необходимую энергию и

б) преобразовывать и передавать энергию при очень больших скоростях ее изменения (т. е. при коротких временах разряда).

Существуют различные источники энергии, типичное время разряда которых меняется от долей микросекунды до многих секунд (табл. 6.1). Среди прочих систем наиболее широко используемой является батарея конденсаторов. Это объясняется ее хоро-

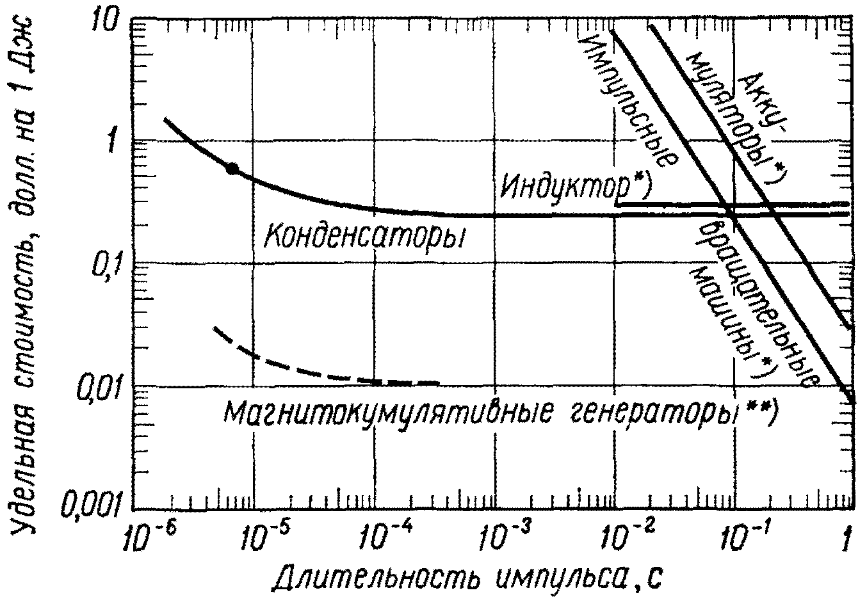
ТАБЛИЦА 6.I

Источники энергии, используемые в импульсных генераторах тока [1])

Первичный источник энергии	Плотность запасенной энергии, Дж·см$^{-3}$	Возможная величина запасенной энергии, МДж	Вырабатываемая электрическая энергия			
			энергия, МДж	длительность импульса, мс	эффективность системы, %	местоположение источника
Химические взрывчатые вещества	10 000	100	2	0,1	2	Фраскати
Конденсатор	10^{-2}—10^{-1}	10	3	0,01	80	Гарчинг
Вращающаяся машина	100	100	2	100	30	Орсей
Катушка индуктивности (индуктор)	10	100	—	—	—	—
Свинцовый аккумулятор	500	100	0,5	1000	0,5	Фраскати

[1]) Приведены типичные, но не обязательно максимальные значения.

шей приспособляемостью к различным экспериментальным условиям и высокой эффективностью преобразования энергии. При длительности импульса свыше 0,1—1 с конкурентами конденсаторных батарей являются механические генераторы, а также химические батареи (фиг. 6.1). Поскольку в данной книге рассматриваются импульсные поля малой длительности, мы лишь



Ф и г. 6.1. Приближенная зависимость удельной стоимости (в долларах) энергии (в джоулях), передаваемой в оптимальную катушку, от времени нарастания.

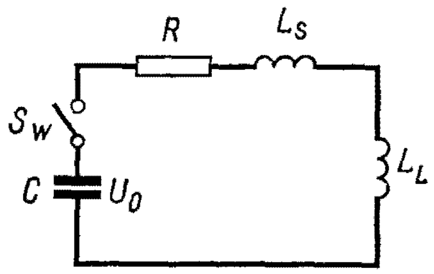
По кривым зависимости удельной стоимости можно судить (вблизи оптимума) об эффективности передачи энергии. Величина стоимости включает стоимость всех составных частей системы (за исключением строений); при этом энергия, передаваемая в катушку, принималась равной около 5 МДж. Кривые, отмеченные звездочкой, взяты из работы, проведенной в 1962 г. Каррузерсом [1.24]. Следует заметить, что данные, полученные вплоть до 1969 г., позволяют внести следующие коррективы: а) среднее значение стоимости в случае конденсаторной батареи может быть ниже на 20% для длительностей импульсов короче 0,1 с и на 50% — для более длинных импульсов, учитывая, что стоимость конденсаторов составляет 0,05 — 0,20 доллара на 1 Дж, а полная стоимость батареи приблизительно в 1,5 — 3 раза больше, причем конкретная величина зависит от напряжения, частоты повторения импульсов, среднего времени жизни и т. д. (см., например, [6.20, 6.13]; точка на кривой «конденсаторы» соответствует батарее, показанной на фиг. 6.5); б) для сверхпроводящих катушек индуктивности удельная стоимость (при эффективности передачи энергии 20%) может быть ниже в 2 раза или более [6.13]; примерно то же самое справедливо и для катушек, охлаждаемых до низких температур, которые, однако, значительно менее чувствительны, чем сверхпроводящие катушки, к эффектам нагрева, имеющим место во время переходных процессов [6.18]; в) кривая, относящаяся к магнитокумулятивным генераторам, рассчитана по данным, которые получены на установке, имеющей стоимость около 50 000 долл., но необходимо учитывать, что каждый выстрел обходится дополнительно примерно в 1000 долл. для установки в 5 МДж. Для полной энергии 50 МДж удельная стоимость в случае конденсаторной батареи остается приблизительно той же, что и раньше; в случае индуктивного накопителя она уменьшается приблизительно в 5 раз, а в случае магнитокумулятивного генератора — примерно в 3 раза.

кратко остановимся на таких генераторах в конце главы. С другой стороны, для создания импульсных сильных магнитных полей весьма подходят генераторы, принцип действия которых основан на сжатии магнитного потока; подробное описание этих генераторов будет дано в следующей главе.

В некоторых случаях важное значение имеет такая характеристика системы, как плотность запасенной энергии (см. табл. 6.I), поскольку она определяет реальные размеры источника энергии. С увеличением размеров источников энергии возрастает длина подводки до нагрузки, т. е. увеличиваются индуктивность цепи и омические потери в ней. Наконец, в некоторых предельных случаях конечная скорость передачи энергии в системе (которая может быть равна скорости света, альфвеновской скорости, скорости ударной волны и т. д.) устанавливает теоретический предел мощности, которую можно передать в нагрузку.

§ 2. СИСТЕМА С КОНДЕНСАТОРНОЙ БАТАРЕЕЙ

6.2. Первое, грубое приближение для задач, связанных с созданием магнитных полей за счет разряда конденсаторной батареи через соответствующую систему проводников, дается схемой последовательной цепи с сосредоточенными и постоянными



Фиг. 6.2. *LCR*-цепь с сосредоточенными параметрами.

емкостью (C), индуктивностью (L) и сопротивлением (R) (фиг. 6.2) решения для такой цепи хорошо известны. В реальных условия даже для системы с механически фиксированными элементам величины R и L меняются со временем вследствие диффузии ма нитного поля в проводник (см. гл. 3 и 4).

Основные решения для LCR-цепи с сосредоточенными параметрами

6.3. Дифференциальное уравнение для тока I, текуще по цепи, показанной на фиг. 7.2, записывается следующим образо

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=0, \qquad (6.$$

где

$$L=L_L+L_S.$$

Решим это уравнение для заданных начальных условий ($t=$

$$I=0, \qquad q=q_0. \qquad (6$$

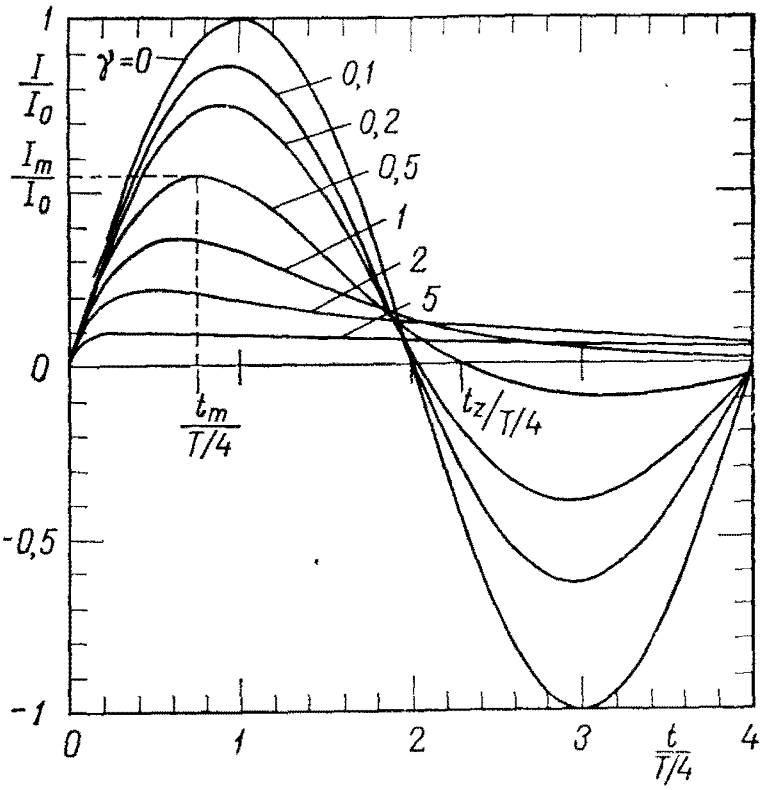
Электрический заряд

$$q = \int I\,dt, \tag{6.3}$$

первоначально накопленный в конденсаторе при напряжении U_0, равен

$$q_0 = CU_0. \tag{6.4}$$

6.4. При $R < 2\sqrt{(L/C)}$ (случай, когда *затухание цепи меньше*



Фиг. 6.3. Ток разряда для различных значений $\gamma = {}^1/_2\, R\sqrt{(C/L)}$.

критического) решение уравнения (6 1) имеет вид

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right) \sin \omega t \tag{6.5}$$

или, в другом виде, для заряда конденсатора

$$q_C = q_0 \frac{\omega_0}{\omega} \exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right) \sin(\omega t + \varphi). \tag{6.6}$$

Здесь ω — угловая частота

$$\omega = \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)^{1/2} = \omega_0 \sqrt{(1-\gamma^2)}, \tag{6.7}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} \tag{6.8}$$

есть *параметр цепи*, и

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{6.9}$$

Фазовый сдвиг в (6.6) определяется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\left\{\frac{1}{\gamma^2} - 1\right\}}. \tag{6.10}$$

6.5. При $R > 2\sqrt{L/C}$ (случай, когда *затухание цепи больше критического*) решение имеет вид

$$I = \frac{U_0}{\omega^* L} \exp\left(-\frac{R}{2L} t\right) \cdot \frac{e^{\omega^* t} - e^{-\omega^* t}}{2}, \tag{6.11}$$

где

$$\omega^* = \omega_0 \sqrt{(\gamma^2 - 1)}. \tag{6.12}$$

Для полноты описания представим также решение для особого *случая затухания цепи, равного критическому* $(R = 2\sqrt{L/C})$

$$I = \frac{U_0}{L} t \exp\left(-\frac{R}{2L} t\right). \tag{6.13}$$

Некоторые примеры, соответствующие решениям (6.5), (6.12), (6.13), изображены на фиг. 6.3.

Цепь без потерь

6.6. В особом случае цепи без потерь ($R = 0$, $\gamma = 0$) решение (6.5) упрощается к виду

$$I = I_0 \sin \omega_0 t, \tag{6.14}$$

где

$$I_0 = U_0 \sqrt{C/L} \tag{6.15}$$

есть максимальный ток; период колебаний в такой цепи равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}. \tag{6.16}$$

Если ввести обозначение для энергии, первоначально запасенной в конденсаторной батарее,

$$W_0 = \frac{1}{2} C U_0^2, \tag{6.17}$$

то выражения (6.15) и (6.16) могут быть переписаны в виде

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{2W_0}{L}\right)} \tag{6.18}$$

и

$$\frac{1}{4} T = \frac{\pi}{U_0} \sqrt{\left(\frac{1}{2} L W_0\right)}. \tag{6.19}$$

При заданном значении W_0 (которое приблизительно пропорционально стоимости и объему батареи, см. фиг. 6.1), вообще говоря, можно выбирать определенное значение зарядного напряжения U_0 и таким образом влиять на время нарастания тока (6.19) или на начальную скорость изменения тока

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0}=\frac{U_0}{L}. \tag{6.20}$$

С другой стороны, с этой же целью можно уменьшать L, используя в цепи элементы с низкой индуктивностью.

6.7. Для цепи без потерь максимальный ток ($I_m=I_0$) и время нарастания ($^1/_4T$) связаны соотношением

$$\frac{1}{4}\,T\cdot I_m=\frac{1}{2}\,\pi q_0, \tag{6.21}$$

т. е. для данного значения первоначального заряда q_0 увеличение максимального тока (при уменьшении индуктивности) достигается только ценой уменьшения времени нарастания.

Цепь с конечным активным сопротивлением

6.8. При рассмотрении вопроса генерации сильных импульсных магнитных полей одними из наиболее важных количественных характеристик цепи являются значение тока в первом максимуме (I_m) и время его достижения (t_m). Значения I_m и t_m легко получаются максимизацией решений, даваемых в пп. 6.4 и 6.5. Для различных значений параметров цепи имеем:

для $0\leqslant\gamma<1$

$$\begin{gathered}\frac{I_m}{I_0}=\exp\left\{-\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\arcsin\sqrt{1-\gamma^2}\right\},\\ \frac{t_m}{^1/_4T}=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\arcsin\sqrt{1-\gamma^2};\end{gathered} \tag{6.24}$$

для $\gamma=1$

$$\frac{I_m}{I_0}=\frac{1}{e},\qquad \frac{t_m}{^1/_4T}=\frac{2}{\pi}; \tag{6.25}$$

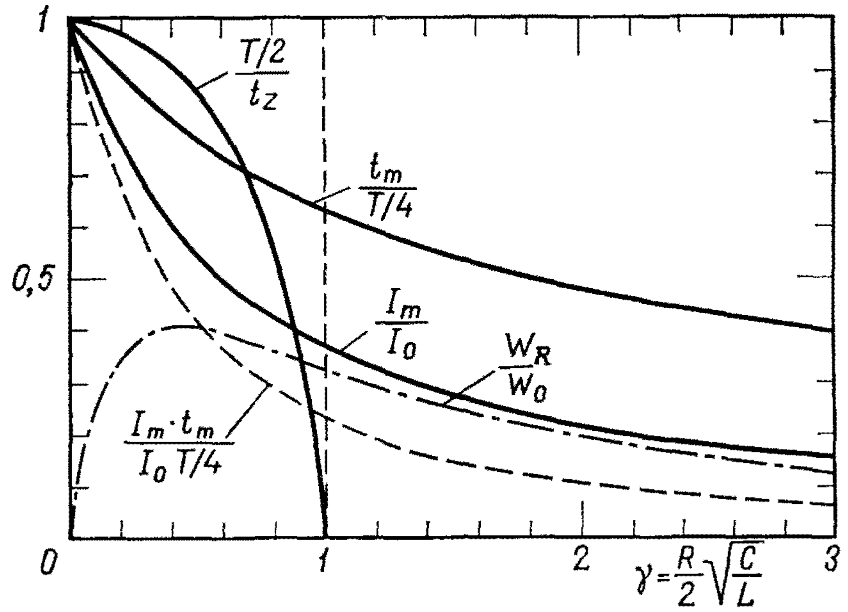
для $1<\gamma<\infty$

$$\begin{gathered}\frac{t_m}{^1/_4T}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\ln\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)}{\sqrt{\gamma^2-1}},\\ \frac{I_m}{I_0}=\left[\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right]^{-\gamma/\sqrt{\gamma^2-1}}.\end{gathered} \tag{6.26}$$

Эти функции были рассчитаны численным методом; они изображены на фиг. 6.4 при различных значениях параметра цепи вплоть до $\gamma=3$. Там же представлена зависимость

$$\frac{t_z}{{}^1/_4 T}=\frac{2}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \tag{6.27}$$

здесь t_z — время, соответствующее первому нулю; с увеличением γ значение t_z стремится к бесконечности, в то время как t_m стремится к нулю.



Фиг. 6.4. Изменение относительных значений t_m, t_z, I_m (см. фиг. 6.3) в зависимости от γ.

W_R — энергия, рассеянная в активном сопротивлении к моменту времени t_m: (пунктирная кривая полезна при оценке параметров цепи (см. п. 6.9.).

6.9. Если известны параметры цепи U_0, C, L, R, то значения I_m, t_m и t_z можно непосредственно определить из кривых на фиг. 6.4. Если из всех параметров цепи известны, как это часто бывает на практике [6.1], только параметры конденсатора U_0 и C, то, измеряя I_m и t_m, можно определить соответствующую точку на пунктирной кривой фиг. 6.4; так как

$$\frac{I_m}{I_0}\frac{t_m}{{}^1/_4 T}=I_m t_m \frac{2}{\pi}\frac{1}{U_0 C}, \tag{6.28}$$

то проекция этой точки на кривую тока

$$\frac{I_m}{I_0}=\frac{I_m}{U_0}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

определяет неизвестное значение L, а зная γ [уравнение (6.8)], можно найти значение сопротивления R. *Пример*: дано $U_0=$

$=15$ кВ, $C=1{,}76\cdot10^{-3}$ Ф и измеренные значения $I_m=520$ кА, $t_m=26$ мкс; находим $\gamma=0{,}7$, $I_m/I_0=0{,}462$, откуда следует $L=0{,}31$ мкГ и $R=18{,}6$ мОм.

6.10. В момент первого максимума тока (ток I_m, время t_m) имеем

$$W_0=W_{\mathrm{Rm}}+W_{\mathrm{Lm}}+W_{\mathrm{Cm}}, \tag{6.29}$$

где рассеиваемая энергия определяется следующим образом:

$$W_{\mathrm{Rm}}=R\int\limits_0^{t_m} I^2\,dt; \tag{6.30}$$

энергия, запасенная в индуктивности, равна

$$W_{\mathrm{Lm}}=\frac{1}{2}LI_m^2; \tag{6.31}$$

энергия конденсаторной батареи может быть записана в виде

$$W_{\mathrm{Cm}}=\frac{1}{2}C\,(RI_m)^2, \tag{6.32}$$

и первоначально запасенная энергия дается уравнением (6.17). Вводя параметр цепи (6.8)

$$\gamma=\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}=\pi\frac{RC}{T}, \tag{6.33}$$

из уравнения (6.29) (см. фиг. 6.4) получаем выражение для относительной рассеиваемой энергии

$$\frac{W_{\mathrm{Rm}}}{W_0}=1-\left(\frac{I_m}{I_0}\right)^2(1+4\gamma^2). \tag{6.34}$$

Влияние непостоянства элементов цепи

6.11. Строго говоря, не существует LCR-цепи с постоянными элементами. И сопротивление, и индуктивность проводника меняются во времени, например, вследствие временно́й зависимости диффузии магнитного поля (гл. 3 и 4). Более того, следует также учитывать, что электропроводность проводника изменяется как функция его внутренней энергии, которая в свою очередь зависит от джоулева нагрева. Часто в состав цепи входит переменная индуктивность $L\,(t)$ (см. примеры в пп. 5.32 и 9.40). Тогда падение напряжения на индуктивности L может быть представлено в виде $d\,(LI)/dt = L\,(dI/dt)+I\,(dL/dt)$, так что при постоянных R и C в уравнении (6.1) появляются два дополнительных члена: $2\,(dL/dt)\,(dI/dt)$ и $I\,(d^2L/dt^2)$ (энергетические аспекты этой задачи будут рассмотрены в п. 8.3). В принципе уравнения энергетической цепи следует решать совместно с уравнениями, описывающими эти эффекты (диффузию и пр.); в результате задача часто становится неразрешимой. Иногда можно упростить проблему, пренебрегая сравнительно малыми эффектами или задавая полученные численным способом результаты в виде функции безразмерных параметров (см. п. 9.40). Например, в частном случае переменной индуктивности, когда $dL/dt = \text{const}$, можно использовать результаты, полученные ранее в пп. 6.8 и 6.9, если при этом заменить сопротивление величиной $R + 2\,(dL/dt)$.

6.12. В случае когда разрядная цепь состоит только из обычных проводящих элементов, величина энергетических потерь может быть разумно оценена, если использовать понятие скин-слоя энергии s_e (см. п. 4.13, табл. 4.II, 4.IV, и работу [6.2]).

В соответствии с результатами гл. 4 энергетические потери можно формально разделить на две части: одну, определяемую средним сопротивлением, и другую, определяемую средней индуктивностью; тем самым устанавливается связь между теорией диффузии, рассмотренной в гл. 4, и анализом цепи, проведенным в этой главе. Ясно, однако, что такой формальный прием приводит к решению, имеющему только качественный характер, так как оно зависит от многих упрощающих допущений.

В качестве примера рассмотрим идеальный случай плоского полубесконечного проводника (с электропроводностью σ_0, магнитной проницаемостью μ_0), по которому течет ток с линейной плотностью i:

$$i = i_0 \sin \omega t, \qquad H = H_0 \sin \omega t.$$

В соответствии с результатами, полученными в пп. 4.5 и 4.12, для омических потерь (на единицу поверхности) можно написать

$$W_R = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 s_{eR} = \int_0^t \bar{R} i^2 \, dt,$$

где s_{eR} — толщина скин-слоя «активной» энергии. Из табл. 4.II следует, что

$$s_{eR} \approx \frac{1}{2} s_e \approx 0{,}6 \sqrt{\frac{\pi}{8\sigma_0 \mu_0 \omega}}.$$

Таким образом, для усредненного постоянного сопротивления $\bar{R}$ находим при $t = {}^1/_4 T = \pi/2\omega$

$$\bar{R}\left(t = \frac{1}{4} T\right) \approx \frac{0{,}8}{\sigma_0 s_e}.$$

Аналогично для приращения индуктивности ΔL, обусловленного наличием магнитной энергии (только внутри проводника), можно записать

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\,\mu_0 H^2 s_{eH} = \frac{1}{2}\,\Delta L i^2,$$

где $s_{eH} \approx {}^1/_2 s_e$ соответствует толщине скин-слоя «индуктивной» энергии; отсюда получаем

$$\Delta L \approx \frac{1}{2}\,\mu_0 s_e.$$

Получение магнитных полей с помощью конденсаторных батарей. Общие замечания

6.13. Конденсаторные батареи уже длительное время используются для получения импульсных сильных магнитных полей (гл. 1). Их широкое применение обусловлено главным образом тем, что, во-первых, они обладают очень высокой эффективностью передачи запасенной энергии W_0 в индуктивную нагрузку L_L (на практике может быть достигнута 90%-ная эффективность) и, во-вторых, они дают возможность изменять длительность процесса на несколько порядков (наименьшие длительности составляют около микросекунд). Уже созданы большие батареи конденсаторов с запасенной энергией порядка 0,1—1 МДж и типичным значением четверти периода разряда около 10 мкс для целей исследования управляемых термоядерных реакций (фиг. 6.5, табл. 6.II), и ожидается, что в семидесятых годах будут построены большие системы на десятки мегаджоулей запасенной энергии. В табл. 7.I и 7.II приводятся данные других конденсаторных батарей, используемых специально для получения очень сильных магнитных полей.

6.14. Используя уравнения (6.18) и (6.31), эффективность передачи энергии от батареи конденсаторов (W_0) к катушке (W_L) в момент максимума тока можно представить в виде

$$\frac{W_L}{W_0} = \frac{L_L}{L}\left(\frac{I_m}{I_0}\right)^2, \tag{6.35}$$

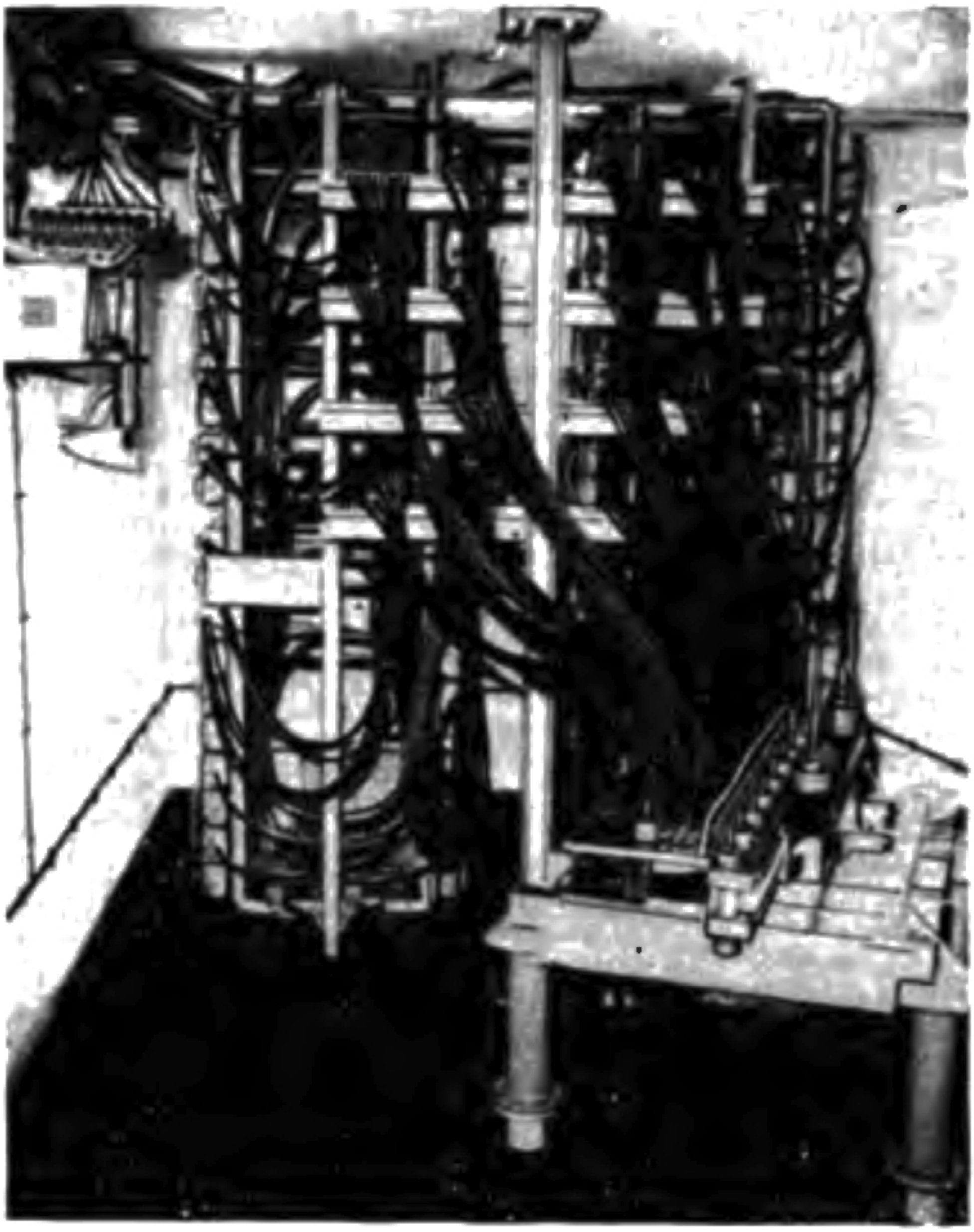
где полная индуктивность цепи

$$L = L_s + L_L \tag{6.36}$$

состоит из индуктивности катушки L_L и суммарной индуктивности L_s остальных элементов цепи (конденсаторов, передающих линий, разрядников и т. д.); относительное значение максимального тока I_m/I_0 приведено на фиг. 6.4 в виде функции $\gamma = {}^1/_2 R\sqrt{C/L}$.

6.15. Основными параметрами конденсаторной батареи будем считать:

а) запасенную энергию W_0;
б) зарядное напряжение U_0;
в) индуктивность батареи L_B.



Фиг. 6.5. Конденсаторная батарея с одновитковым соленоидом, смонтированным на коллекторе.

$U_0 = 15$ кВ, $W_0 = 200$ кДж, $C = 1{,}760$ мФ; параметры цепи при короткозамкнутом коллекторе: $L = 0{,}006$ мкГ, $R = 0{,}6$ мОм, $\frac{1}{4}T = 5$ мкс (батарея имеет длину 4 м, высота комнаты 3,80 м; см. также фиг. 1.6).

При желании вместо этих величин можно выбрать другие связанные с ними величины, такие, как емкость C, заряд q. Добавим, что для точной оценки характеристики батереи необходимо также знать:

г) индуктивность катушки L_L и
д) сопротивление цепи R.

ТАБЛИЦА 6.II

Большие «быстрые» батареи конденсаторов (1968 г.)

Лаборатория	Энергия, МДж	Напряжение, кВ	Индуктивность		Максимальный ток, мА	Четверть периода (включая катушку), мкс
			батареи, нГ	полная, включая катушку, нГ		
1. Институт физики плазмы, Гархинг, ФРГ [7.3]	2,65	40	4,1	11,6	21,3	9,5
2. Калемская лаборатория, Великобритания [7.2]	1,1	40	5,7	10,7	12,1	6
3. Научно-исследовательская лаборатория ВМФ, Вашингтон, США [6.23]	2	20	4,0	10	17	16
4. Лаборатория излучений им. Лоуренса, Ливермор, США [1.65]	1,64	70	~ 2	5	25	2,9
5. Лос-Аламосская научная лаборатория, Лос-Аламос, США [6.24]	10	60	—	1	150	4

Замечание. Все батареи могут быть замкнуты «кроубаром» в момент максимума тока; при этом постоянная затухания L/R составляет величину порядка 100 мкс (исключение составляет ливерморская батарея).

6.16. Выбор параметров системы «батарея — катушка» основан, во-первых, на требованиях, предъявляемых к характеристике магнитного поля, и, во-вторых, на тех количественных соотношениях, которые справедливы для данной системы (см. предыдущие пункты). В связи с выбором основных параметров конденсаторной батареи (см. п. 6.15) можно сделать следующие общие замечания.

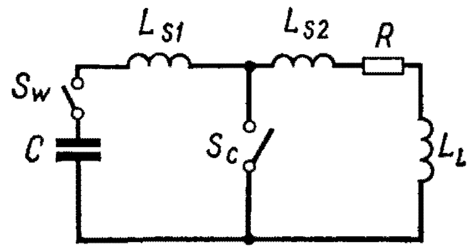
а) Энергия батареи W_0 определяется в первую очередь величиной магнитной энергии в нагрузке.

б) При заданном W_0 значение U_0 определяется емкостью C_0 (и временем нарастания $^1/_4 T$, если известно L).

в, г) Как будет видно в следующей главе, выбор типа катушки (т. е. L_L) обосновывается различными соображениями, такими, как величина максимального поля, механическая прочность, простота конструкции и т. д. При выбранном значении L_L требование эффективной передачи энергии $L_L > L_B$ определяет требование к конструкции конденсаторной батареи.

д) Величина сопротивления, определяемая катушкой [см. уравнение (7.3)], конденсаторами или кабелями, задает значение I_m/I_0 через параметр γ [уравнение (6.33) и фиг. 6.4]; но то же самое можно сказать и относительно C, L или T. Например, выгодно использовать катушки с большим значением L_L, что приводит к уменьшению γ, и, следовательно, в итоге увеличивает I_m/I_0.

6.17. Рассмотрим новый элемент цепи, а именно замыкатель нагрузки (*кроубар*) [6.27]. Он был разработан специально для больших конденсаторных батарей, используемых в исследованиях управляемых термоядерных реакций, но его рассмотрение представляет и более общий интерес. Переключатель S_c вводится

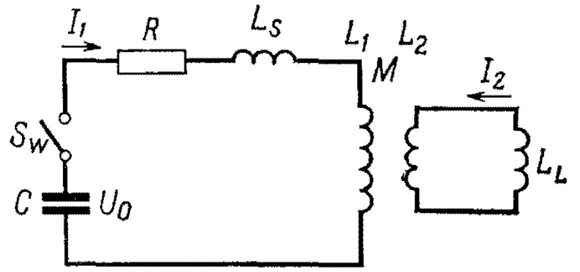


Фиг. 6.6. Кроубар-замыкатель S_c в LCR-цепи.

в цепь, как показано на фиг. 6.6, и замыкается в момент достижения максимума тока; в результате поток, связанный с индуктивностями $L_L + L_{S2}$, медленно затухает с постоянной времени $(L_L + L_{S2})/R$(L_{S1}, L_{S2} — паразитные индуктивности, см. фиг. 6.6). Например, в случае больших батарей, параметры которых приведены в табл. 6.II, поле, достигающее максимума за несколько микросекунд, затухает, как правило, с постоянной времени порядка 100 мкс. Кроубар подключается рядом с конденсаторами, чтобы в полную индуктивность входила (после замыкания) как можно бóльшая часть паразитной индуктивности ($L_{S2} > L_{S1}$); сопротивление должно быть как можно меньше (это обеспечивается, например, предварительным охлаждением катушки и т. п.).

Если в правую часть цепи (фиг. 6.6) подводить дополнительную энергию для компенсации потерь, то реализуется случай *активного кроубара*. Это можно осуществить, по крайней мере в принципе, несколькими способами: например, введением в L_{S2} (с использованием трансформаторной связи) энергии от внешнего источника (например, от конденсаторной батареи) или уменьшением индуктивности L_{S2} во время второй фазы разряда (т. е. после замыкания переключателя). Последнее представляет собой типичный пример сжатия магнитного потока (см. гл. 8), при котором механическая энергия превращается в магнитную. Наиболее часто используемой схемой активного кроубара является схема, в которой с помощью переключателя S_c на нагрузку разряжается вторая конденсаторная батарея.

6.18. Для получения сильных магнитных полей может быть использована схема с *импульсным трансформатором*, включен-



Ф и г. 6.7. Система конденсаторной батареи с трансформатором.

ным между емкостью и нагрузкой L_L, как показано на фиг. 6.7. Обозначая через M *коэффициент взаимной индукции*

$$M = K\sqrt{L_1 L_2} \tag{6.37}$$

(K — *коэффициент связи*), уравнения для двух цепей можно записать в виде

$$\frac{1}{C}\int_0^t I_1\,dt + RI_1 + (L_S + L_1)\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} = 0, \tag{6.38}$$

$$(L_L + L_2)\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt} = 0. \tag{6.39}$$

Преобразуем первое уравнение, исключая из него I_2:

$$L_E\frac{d^2I_1}{dt^2} + R\frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C}I_1 = 0, \tag{6.40}$$

где

$$L_E = L_s + \beta L_L,$$

$$\beta = \frac{L_1}{L_2}\,\frac{[1 + (1-K^2)/\alpha]}{(1+\alpha)}, \qquad \alpha = \frac{L_L}{L_2}. \tag{6.41}$$

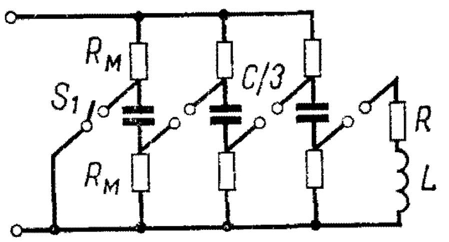
Из (6.40) и (6.41) видно, что электрическая цепь, изображенная на фиг. 6.7, эквивалентна последовательной цепи на фиг. 6.2 с «кажущейся» индуктивностью нагрузки, равной βL_L. Выражение для вторичного тока, протекающего через нагрузку, получается интегрированием уравнения (6.39)

$$I_2 = \frac{M}{L_L + L_2}\,I_1. \tag{6.42}$$

Из сравнения результатов для двух цепей, изображенных на фиг. 6.2 и 6.7, вытекает, что использование трансформатора тока в системе с конденсаторной батареей может привести, по крайней мере в принципе, к некоторым последствиям, интересным с точки зрения получения магнитных полей (изменение периода разряда, возможное уменьшение относительных потерь энергии в L_S или R и т. п.).

На практике возможность использования импульсных трансформаторов в системе с конденсаторной батареей наталкивается на ряд ограничений. Прежде всего расходы на изготовление трансформатора могут составить до $^1/_3$ стоимости всей системы; кроме того, трансформатор вносит как омические, так и индуктивные потери энергии. Из изложенного в п. 6.18 следует, что применение трансформатора выгодно тогда, когда с данной конденсаторной батареей должна быть использована катушка, обладающая малой индуктивностью. Но даже и в этом случае возможно другое решение: использование *концентратора потока*, который будет описан в п. 7.11 (см. фиг. 7.6). Подробное обсуждение достоинств и недостатков импульсного трансформатора проведено в работе [1.42].

6.19. Существуют и другие модификации цепи, которые позволяют приспособить ее к специфическим требованиям, связанным



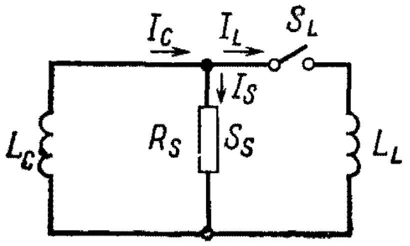
Фиг. 6.8. Батарея, собранная по схеме Маркса и состоящая из трех ячеек. Если развязывающие сопротивления R_M достаточно велики, то выходное напряжение в первый момент равно NU_0, а время разряда составляет T/N, где U_0 и T — значения, соответствующие батарее с параллельным соединением конденсаторов (фиг. 6.2).

с генерацией сильных магнитных полей. Например, можно получить более короткое время разряда (и более высокое выходное напряжение) по сравнению со схемой, в которой конденсаторы соединены параллельно (фиг. 6.2), если разбить батарею на N одинаковых частей (с той же общей запасенной энергией), как показано на фиг. 6.8. Такая схема называется *схемой Маркса*. Подобный принцип параллельного заряда и последующего последовательного разряда можно распространить и на другие схемы генераторов.

6.20. Когда необходимо получить время разряда меньше 1 мкс, целесообразно в качестве источника энергии использовать заряженную передающую линию (например, коаксиальную линию, п. П1.7, длиной l с распределенными емкостью C_u и индуктивностью L_u на единицу длины). В этом случае время разряда ($^1/_4 T$ = $^1/_2 \pi \sqrt{L_u C_u}$), очевидно, того же порядка, что и время l/c, необходимое для прохождения вдоль линии электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью c. Для эффективной работы требуется согласовывать сопротивление нагрузки с характеристическим сопротивлением линии ($Z = \sqrt{L_u/C_u}$); чтобы получить значительную величину запасенной энергии ($W_0 = {}^1/_2 lC_u U_0^2$), необходимо заряжать линию до напряжений порядка мегавольт.

§ 3. ИНДУКТИВНЫЕ НАКОПИТЕЛИ

6.21. Кроме емкостного накопителя можно использовать также индуктивный накопитель энергии в схемах генераторов магнитных полей. В этом случае первичный источник энергии (батарея со свинцовыми элементами, униполярный генератор и т. д.) питает



Фиг. 6.9. Индуктивный накопитель с активным сопротивлением в ветви разрыва.

током I_{C0} накопительную индуктивность L_C, затем накопленная энергия передается с определенной эффективностью в индуктивность нагрузки L_L, что достигается увеличением сопротивления Z в общей ветви цепи ($Z = R_S$ на фиг. 6.9). Одним из преимуществ индуктивного накопителя энергии является то, что он занимает меньший объем, чем емкостный накопитель; например, если энергия запасается в форме энергии магнитного поля при напряженности 50 кЭ, ее плотность будет примерно в 1000 раз больше, чем в конденсаторе (см. табл. 6.1). Ожидается, что для энергий порядка многих мегаджоулей система с индуктивным накопителем может быть значительно дешевле, чем соответствующая конденсаторная батарея (см. [1.24]).

Чтобы передать энергию от индуктивного накопителя в нагрузку, необходимо разомкнуть общую ветвь цепи. Однако еще не созданы эффективные переключатели с требуемыми характеристиками размыкания, способные работать при энергиях порядка мегаджоулей за время менее 10 мкс. В результате этого использование индуктивных накопителей энергии до сих пор не вышло из чисто экспериментальной стадии. Положение в этой области может быстро измениться с внедрением больших сверхпроводящих катушек, которые могут быть использованы в качестве накопительных индуктивностей, и с созданием подходящих переключателей.

Вполне вероятно, что эта форма накопления энергии за несколько лет приобретет большое практическое значение. Уже созданы большие сверхпроводящие катушки, позволяющие получить поле величиной около 20 кЭ при запасаемой энергии 80 МДж [6.7].

Индуктивный накопитель с активным сопротивлением в ветви разрыва

6.22. В качестве одного из возможных примеров индуктивной разрядной цепи рассмотрим идеальную цепь, изображенную на фиг. 6.9 (более сложный пример приводится в пп. 8.5—8.9). Переключатель представлен сопротивлением R_S; при $R_S = 0$ он замкнут, при $R_S = \infty$ — разомкнут.

Положим, что в начальный момент $R_S = 0$ и ток I_{C_0} течет только в левой петле цепи. Пусть теперь за короткий промежуток времени Δt сопротивление возрастает до конечной величины R_{S_0}; при этом начальный поток $L_C I_{C_0}$, связанный с постоянной индуктивностью L_C через R_{S_0}, частично рассеивается в L_L. В этом случае цепь описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} L_C \frac{dI_C}{dt} + R_{S_0} I_S = 0, \\ L_L \frac{dI_L}{dt} + R_{S_0} I_S = 0, \end{aligned} \tag{6.43}$$

где

$$I_C = I_L + I_S.$$

Исключим I_S из уравнений (6.43) и, проинтегрировав эти уравнения, получим (с учетом начальных условий $I_C = I_{C_0}$, $I_L = 0$ при $t = 0$)

$$L_C I_{C_0} = L_C I_C + L_L I_L. \tag{6.44}$$

Это выражение показывает, что полный поток в цепи остается постоянным. Легко получить общее решение этой задачи

$$\begin{aligned} I_C &= I_\infty \left[1 + \frac{L_L}{L_C} \exp\left\{ -\left(\frac{R_{S_0}}{L_C} + \frac{R_{S_0}}{L_L} \right) t \right\} \right], \\ I_L &= I_\infty \left[1 - \exp\left\{ -\left(\frac{R_{S_0}}{L_C} + \frac{R_{S_0}}{L_L} \right) t \right\} \right], \end{aligned} \tag{6.45}$$

где

$$I_\infty = I_{C_0} \frac{L_C}{L_C + L_L} \tag{6.46}$$

есть асимптотическое значение тока во внешней петле при $t \to \infty$.

6.23. Попытаемся узнать, что происходит с первоначально запасенной энергией

$$W_{C_0} = \frac{1}{2} L_C I_{C_0}^2 \tag{6.47}$$

при $t \to \infty$. Для энергии, передаваемой в нагрузку L_L, находим

$$W_L = \frac{1}{2} L_L I_\infty^2 = \frac{L_C L_L}{(L_C + L_L)^2} W_{C_0}. \tag{6.48a}$$

Из этого выражения следует, что максимальная эффективность передачи энергии, получающаяся при $L_C = L_L$, составляет только 25%. Энергия, остающаяся в накопительной индуктивности L_C, равна

$$W_C = \frac{1}{2} L_C I_\infty^2 = \left(\frac{L_C}{L_C + L_L}\right)^2 W_{C_0}, \tag{6.48б}$$

поэтому энергия, рассеиваемая сопротивлением, определяется выражением

$$W_S = W_{C_0} - W_C - W_L = \frac{L_L}{L_C + L_L} W_{C_0}. \tag{6.49}$$

При оптимальных условиях ($L_C = L_L$) 50% начальной энергии рассеивается в выключателе. Уравнения (6.48а), (6.48б), (6.49) не зависят от R_{S_0}: сопротивление влияет только на величину постоянной времени в решении (6.45). Если предположить, что переключатель полностью размыкается ($R_S \to \infty$) за время Δt, то все энергетические соотношения можно было бы непосредственно получить из принципа сохранения магнитного потока без решения системы уравнений (6.43).

Большой интерес представляет случай, когда нагрузка индуктивного накопителя представляет собой *чисто активное сопротивление*. Действительно, если на фиг. 6.9 заменить L_L активным сопротивлением R_L, то легко показать, что рассеиваемая в этой нагрузке энергия равна (при $t \to \infty$)

$$W_R = \frac{R_{S_0}}{R_{S_0} + R_L} W_{C_0},$$

что означает большую эффективность передачи энергии, если $R_L/R_{S_0} \ll 1$.

6.24. Полное размыкание переключателя ($R_S \to \infty$) за время Δt вызывает увеличение тока в нагрузке L_L, среднее значение которого равно

$$\overline{\frac{dI_L}{dt}} \approx \frac{I_\infty}{\Delta t} = \frac{L_C}{L_C + L_L} \frac{I_{C_0}}{\Delta t} \tag{6.50}$$

[см. уравнение (6.46)]. Поэтому напряжение как на выключателе, так и на нагрузке равно

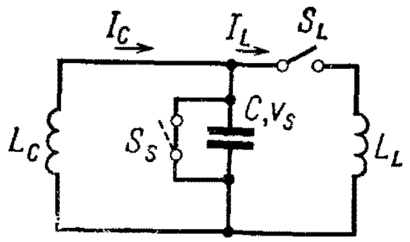
$$U_L \approx L_L \frac{I_\infty}{\Delta t} = \frac{L_L L_C}{L_L + L_C} \frac{I_{C_0}}{\Delta t}. \tag{6.51}$$

Оно может достигать очень большого значения, в связи с чем возникают серьезные технические проблемы обеспечения функционирования переключателя в открытом состоянии (см. п. 6.29).

Малая эффективность передачи индуктивно запасенной энергии в индуктивную нагрузку при использовании коммутирующего сопротивления R_S [как видно из уравнения (6.48а)] делает эту систему не особенно привлекательной для создания магнитных полей. Однако существуют различные способы, позволяющие избежать некоторых из упомянутых выше трудностей. Одно существенное усовершенствование системы обсуждается в следующем пункте.

Индуктивный накопитель с конденсатором, параллельным размыкателю

6.25. Можно повысить эффективность передачи энергии и облегчить условия работы переключателя введением конденсатора, параллельного (идеальному) переключателю. Рассмотрим такой



Фиг. 6.10. Индуктивный накопитель с конденсатором, параллельным размыкателю.

случай в приложении к идеальной цепи, показанной на фиг. 6.10. Эта цепь описывается уравнениями

$$\begin{aligned} L_C = \frac{d^2I_C}{dt^2} + \frac{I_C - I_L}{C} = 0, \\ L_L\frac{d^2I_L}{dt^2} + \frac{I_L - I_C}{C} = 0. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Используя те же обозначения и начальные условия (6.44), что и в п. 6.22, к которым необходимо добавить начальное условие $dI_L/dt = dI_C/dt = 0$ (при $t = 0$), получаем следующее решение уравнений (6.52):

$$\begin{aligned} I_C = I_\infty\left(1 + \frac{L_L}{L_C}\cos\omega t\right), \\ I_L = I_\infty(1 - \cos\omega t), \end{aligned} \tag{6.53}$$

где I_∞ задается уравнением (6.46) и

$$\omega^2 = \frac{L_C + L_L}{L_C L_L C}.$$

6.26. Максимальное значение тока получается из (6.53) при $\omega t = \pi$

$$I_L\,(\text{макс}) = 2I_\infty = \frac{2L_C}{L_C + L_L} I_{C_0}.$$

Таким образом, значение энергии, передаваемой от накопителя в нагрузку, возрастает в 4 раза по сравнению со значением, даваемым уравнением (6.48):

$$W_L = \frac{4L_C L_L}{(L_C + L_L)^2} W_{C_0}, \tag{6.54}$$

где W_{C_0} определяется в (6.47). При $L_C = L_L$ эффективность передачи достигает 100%.

Напряжение на конденсаторе равно

$$V_S = \frac{1}{C} \int (I_C - I_L)\, dt = \frac{I_{C_0}}{C\omega} \sin \omega t, \tag{6.55}$$

и, следовательно, для максимальной энергии конденсатора получаем

$$W_S = \frac{1}{2} C V_S^2 = \frac{L_C + L_L}{4L_C} W_L. \tag{6.56}$$

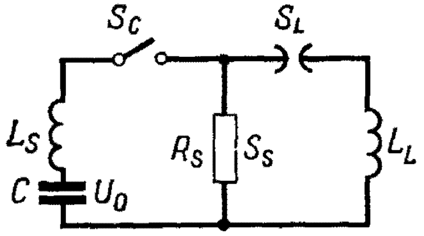
Согласно (6.55), напряжение на переключателе в начале переключения может быть снижено до небольшой величины и, следовательно, процесс размыкания осуществляется значительно легче по сравнению со случаем, описываемым уравнением (6.51). К сожалению, из (6.56) следует, что такое преимущество реализуется только при использовании относительно большой конденсаторной батареи.

Комбинированные индуктивные системы

6.27. Были предложены различные видоизменения и комбинации рассмотренных выше цепей [6.3, 6.16—6.18]. В принципе возможно создание более эффективных систем, но подобные усовершенствования, как правило, требуют более тщательной разработки и отладки коммутирующих цепей.

Например, индуктивный накопитель становится более эффективным, чем рассмотренный ранее, если во время разряда индуктивность нагрузки возрастает соответствующим образом (что может иметь место в ряде эспериментальных устройств, см. гл. 9). Действительно, если индуктивность нагрузки мала ($L_L \ll L_C$) во время процесса переключения, то потери энергии в переключателе [уравнение (6.49) или (6.56)] также остаются малыми ($W_S \ll \ll W_{C_0}$); при этом, конечно, бóльшая часть энергии остается в накопителе ($W_C \gg W_L$). Если L_L быстро возрастает до своего конечного значения L_{L_f} после того, как закончился процесс переключения (переключатель S_S открыт, или конденсатор C отключен), то бóльшая часть оставшейся в накопителе энергии перейдет в нагрузку. Благодаря этому эффективность передачи такой системы повышается по сравнению с ранее разобранными случаями [см. уравнение (6.48а) или (6.54) при $L_L \to L_{L_f}$].

6.28. Рассмотрим другой пример (фиг. 6.11), в котором размыкатель используется для обострения импульса разряда конденсаторной батареи. Емкость C разряжается через индуктивность L_S ($R_S \approx 0$, переключатель S_L открыт). В момент максимума тока



Фиг. 6.11. LCR-цепь разряда, содержащая размыкатель S_S.

($I_m \approx U_0\sqrt{C/L_S}$) переключатель S_S размыкается, как описано в п. 6.24, а S_L замыкается; тогда из (6.51) получаем

$$\frac{dI_L}{dt} \approx \frac{U_0}{L_S + L_L} \frac{\sqrt{CL_S}}{\Delta t}. \tag{6.57}$$

В обычной последовательной LC-цепи ($R_S \to \infty$ на фиг. 6.11), индуктивность которой равна $L_S + L_L$, начальная скорость нарастания тока равна

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} \approx \frac{U_0}{L_S + L_L}. \tag{6.58}$$

Таким образом, при использовании размыкателя S_S скорость нарастания тока увеличивается примерно в $T_C/2\pi\Delta t$ раз, где $T_C = 2\pi\sqrt{CL_S}$ — период разряда левой части цепи.

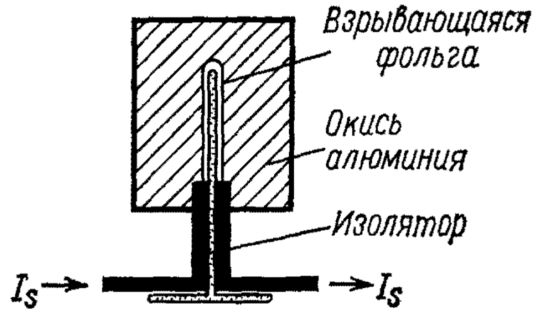
Размыкатели

6.29. Во многих экспериментах (см., например, предыдущий пункт) время размыкания должно быть очень мало ($\leqslant 1$ мкс); это означает, что переключатель должен размыкаться при больших напряжениях [см. уравнение (6.51)], а часто и при больших токах. Серьезные технические проблемы, обусловленные этими требованиями, могут быть решены при использовании соответствующих механических размыкателей, электрически взрываемых проводников (см. следующий пункт), вырождающихся сверхпроводников [6.4] или проводников, разрушаемых взрывом (п. 8.26).

Существует удачный тип размыкателя, который основан на принципе взрывающихся проволочек или фольг, описанных в п. 4.19. Он использовался Горленом, Линхартом и Мезонье [6.5] и др. Кроме очевидного требования, чтобы толщина проводника была меньше ширины скин-слоя, должно выполняться и условие взрыва проводника, непосредственно получаемое из (4.57), т. е. из закона Джоуля (4.4),

$$\frac{1}{S^2}\int\limits_0^{t_{\text{взр}}} I^2\,dt = J_{vb}, \qquad (6.59)$$

где I — полный ток через взрываемый проводник с площадью поперечного сечения S; J_{vb} — интеграл инерции, значения которого для алюминия и меди приведены в табл. 4.III. Если испарение металла происходит достаточно быстро, то будет существовать определенный временной интервал («пауза тока»), в течение



Фиг. 6.12. Размыкатель, использующий взрывающуюся фольгу (см. [6.9]).

которого величина электропроводности очень мала, т. е. переключатель разомкнут. Затем электрический разряд через наружную область паров металла, обладающую низким давлением, начнет восстанавливать высокую проводимость. Однако этот процесс можно замедлить, если окружить взрывающийся проводник веществом (например, порошком Al_2O_3), которое препятствует распространению пара после взрыва (фиг. 6.12).

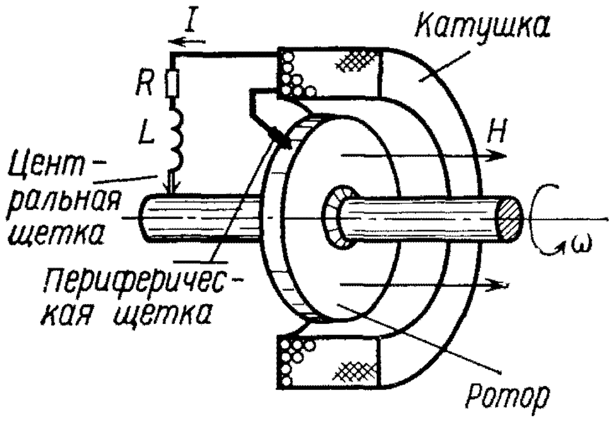
Вращающиеся машины и аккумуляторные батареи

6.30. П. Л. Капица впервые использовал для целей получения сильных магнитных полей аккумуляторную батарею [1.200] и позднее генератор переменного тока [1.201]. Как можно видеть из фиг. 6.1, эти системы конкурируют с конденсаторной батареей только тогда, когда требуемая длительность токового импульса превышает 0,1 с. Большие моторы-генераторы постоянного и переменного тока используются для создания квазистационарных полей в больших объемах, т. е. при больших требуемых мощностях. Типичным примером является установка из четырех генераторов, используемая в Национальной магнитной лаборатории США; каждый из них может в течение продолжительного времени вырабатывать постоянный электрический ток мощностью 2 МВт. Однако установка рассчитана и на работу в импульсном режиме, причем мощность каждого генератора может достигать 8 МВт в течение 5 с.

Обычные коллекторные машины, оборудованные большим маховиком для работы в режиме импульсных перегрузок, могут вырабатывать максимальный ток 50 кА на коммутатор в течение нескольких секунд [1.25]. При длительности импульса короче 1 с генераторы должны конструироваться с таким расчетом, чтобы выдерживать большие механические напряжения. Поэтому специальные типы генераторов, такие, как униполярный генератор, можно считать более перспективными, чем машины обычного типа. Следует заметить, что рассмотрение таких источников энергии, характеризующихся относительно большими постоянными времени, не является главной целью этой книги. Поэтому они будут рассмотрены кратко.

Униполярный генератор

6.31. Принцип действия униполярного генератора, предложенного Фарадеем в 1831 г., основан на том, что при приложении аксиального магнитного поля возникает напряжение между центром и наружным краем вращающегося металлического диска



Фиг. 6.13. Униполярный генератор.

(фиг. 6.13). Из множества применяемых на практике видов такого генератора здесь мы рассмотрим только случай генератора с самовозбуждением, в котором поле H создается выходным током самого же генератора, так что для э. д. с. вдоль ротора можно записать

$$V_R = \alpha I \omega, \qquad (6.60)$$

где α — постоянная генератора, I — полный ток и ω — переменная угловая частота ротора. Для запуска генератора необходимо небольшое внешнее магнитное поле, и как только генератор разовьет определенную мощность, потребность в нем отпадает.

6.32. Уравнение, описывающее электрическую цепь, имеет вид

$$L\frac{dI}{dt}+I\,(R-\alpha\omega)=0, \tag{6.61}$$

где L — суммарная постоянная индуктивность, R — полное постоянное сопротивление цепи (фиг. 6.13). Для определения I и ω в виде функций времени необходимо записать второе уравнение, вытекающее из закона сохранения энергии. При отсутствии внешнего крутящего момента это уравнение записывается в виде

$$\frac{1}{2}M(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{2}LI^2+\int\limits_0^t I^2R\,dt=0, \tag{6.62}$$

где M — момент инерции вращающегося диска, ω_0 — начальная угловая скорость. Дифференцируя последнее выражение и подставляя в него dI/dt из (6.61), получаем вместо (6.61) уравнение для момента количества движения

$$M\frac{d\omega}{dt}=-\alpha I^2. \tag{6.63}$$

6.33. Из (6.61) видно, что нарастание тока $(I^{-1}\,dI/dt>0)$ можно получить только в случае $\omega_0>\omega_c$, где

$$\omega_c=\frac{R}{\alpha} \tag{6.64}$$

есть *критическая угловая частота* системы. После исключения t из (6.61) и (6.63) и интегрирования получаем

$$I^2+\frac{M}{L}(\omega-\omega_c)^2=A. \tag{6.65}$$

Здесь A — постоянная интегрирования, которая определяется начальными условиями $(t=0)$: $\omega=\omega_0$; $I=I_0$ (как уже говорилось, для запуска генератора необходим начальный ток I_0 или внешнее поле H_0). Из уравнений (6.61), (6.63) и (6.65) после интегрирования можно найти

$$I=\frac{\sqrt{A}}{\operatorname{ch}\{\alpha\,(t-t_0)\sqrt{A/ML}\}}, \tag{6.66}$$

где

$$t_0=\frac{\sqrt{ML}}{\alpha\sqrt{A}}\ln\left(\frac{\sqrt{A}}{I_0}+\sqrt{\frac{A}{I_0^2}-1}\right). \tag{6.67}$$

Очевидно, что максимальное значение тока I_m получается в случае, когда гиперболический косинус равен единице. Тогда, предполагая, что начальное значение тока мало, так что $A\approx$

$\approx M(\omega_0-\omega_c)^2/L$, находим (фиг. 6.14)

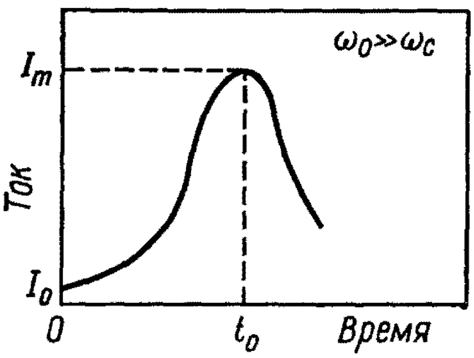
$$I_m \approx (\omega_0-\omega_c)\sqrt{\frac{M}{L}}, \qquad (6.68)$$

$$t_0 \approx \frac{L/R}{(\omega_0/\omega_c)-1}\ln\left(2\frac{I_m}{I_0}\right). \qquad (6.69)$$

Эффективность системы (эффективность преобразования кинетической энергии в магнитную энергию индуктивности нагрузки L_L) равна

$$\eta_H = \frac{L_L I_m^2}{M\omega_0^2} \approx \frac{L_L}{L}\left(1-\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2. \qquad (6.70)$$

Последние три выражения показывают (по крайней мере приближенно) влияние различных параметров на работу машины.



Фиг. 6.14. Импульс тока от униполярного генератора.

Например, удовлетворительная эффективность системы получается только в том случае, когда индуктивность генератора и подводящих проводников L_S (где $L_S = L - L_L$) сравнима с индуктивностью нагрузки L_L, а также когда $\omega_c \ll \omega_0$. Для более тщательного количественного рассмотрения этого вопроса необходимо знать параметр машины α.

6.34. В настоящее время созданы и работают различные машины типа униполярного генератора [1.11—1.13]. Бо́льшая часть исследований таких генераторов была направлена на решение двух главных проблем, которые ограничивают возможность использования генераторов такого типа:

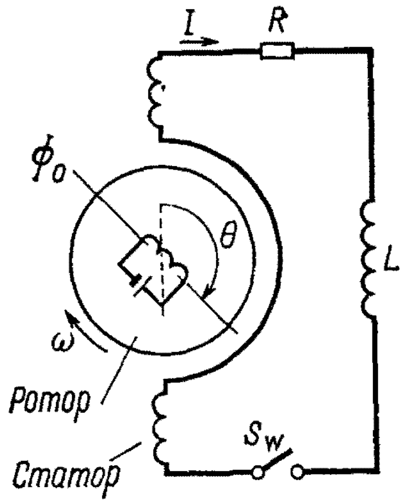
а) проблемы низкого выходного напряжения и

б) проблемы контакта главным образом периферических щеток, что вызвано высокой скоростью вращения ротора.

Преимущество этого типа генератора заключается в том, что ротор, который может быть тождествен маховику, имеет жесткую механическую структуру. Однако в системах с высокой эффективностью удобно разделять эти два элемента, так как скорость вращения ротора ограничивается величиной примерно 200 м·с$^{-1}$ вследствие проблем контакта (даже в том случае, когда используются жидкие металлические контакты и струи). Эта скорость примерно на порядок меньше предельной скорости, определяемой механической прочностью. Принцип разделения ротора и маховика был использован в импульсном генераторе (построенном Риу), который представляет интересное и перспективное усовершенствование генератора униполярного типа [1.68, 6.6]. Одна из моделей этого генератора, которая была тщательно испытана, характеризуется следующими параметрами (их определения даны в предыдущих пунктах): маховик, вес 250 кг, $M = 5 \cdot 10^7$ г·см^2; внутренняя цепь $R_i = 4 \cdot 10^{-6}$ Ом, $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ом·с. При $\omega_0 = 730$ рад·с$^{-1}$ маховик обладает энергией 1,5 МДж и генератор вырабатывает ток 1,1 МА, т. е. энергию 0,5 МДж в активную нагрузку $2 \cdot 10^{-4}$ Ом за 0,1 с.

Синхронный генератор

6.35. К совершенно иному типу вращающихся машин относится синхронный генератор (фиг. 6.15), который также может быть использован как импульсный генератор однонаправленного тока



Фиг. 6.15. Синхронный генератор.

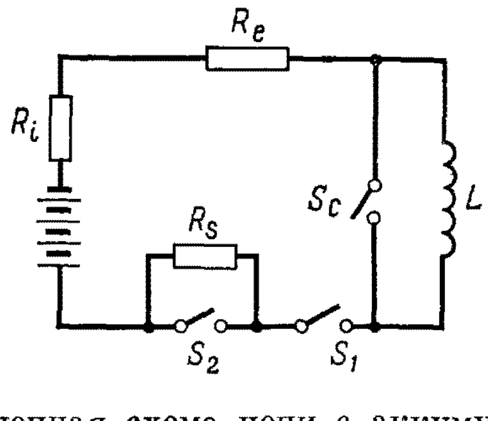
очень большой мощности. Если ротор пересекает вращающийся биполярный поток, создаваемый постоянным током, и если он затормаживается в пределах половины оборота, то в нагрузке индуцируется однонаправленный импульс тока (этого же можно достичь при соответствующем действии ключа S_W, что было использовано в генераторе Капицы). Вывод соотношений для такого генератора может быть произведен аналогично сделанному выше для униполярной цепи с той лишь разницей, что выражение для э. д. с. вместо уравнения (6.60) имеет вид $\alpha\phi_0 d \cos\theta/dt$. Преимущества синхронного генератора перед униполярным заключаются в следующем: а) в основных цепях отсутствуют скользящие или жидкостные контакты (которые могут существенно ограничивать выходную мощность) и б) возможно получение высоких выходных напряжений.

С другой стороны, в этом случае ротор обычно имеет более сложную конструкцию, но существует ряд предложений [6.8], которые могут позволить обойти этот недостаток. Резюмируя, можно сказать, что такие синхронные генераторы являются заслуживающими внимания источниками энергии для целей получения сильных магнитных полей в больших объемах. В дополнение заметим, что, как было показано Капицей, видоизменяя витки обмотки возбуждения, можно менять форму импульса выходного тока: например, на своем генераторе Капица получил импульс с почти плоской вершиной длительностью около 20 мс.

Система с использованием аккумуляторов

6.36. Аккумуляторные батареи свинцово-кислотного типа (такие, как обычные автомобильные батареи или батареи для подводных лодок) часто используются в качестве источников тока для получения сильных магнитных полей. Как видно из фиг. 6.1, такие батареи могут конкурировать с источниками энергии других видов только при длительности импульса более 0,1 с, поскольку выходной ток ограничен внутренним сопротивлением аккумуляторных элементов. Возможно создание более эффективных аккумуляторных элементов для работы в импульсном режиме [1.24], однако до настоящего времени серьезные исследования в этой области не производились.

6.37. Основные принципы работы такого источника энергии можно понять из упрощенной схемы (фиг. 6.16). В случае когда



Фиг. 6.16. Упрощенная схема цепи с аккумуляторной батареей.

ключи S_1, S_2 замкнуты, ток в цепи, очевидно, изменяется по закону:

$$I = \frac{V_B}{R}\left(1 - \exp\left\{\frac{R}{L}\,t\right\}\right), \tag{6.71}$$

где $R = R_i + R_e$ — полное сопротивление цепи, включающее в себя также внутреннее сопротивление батареи R_i, которое для каждого элемента батареи составляет около 0,1 мОм. Значение полного напряжения V_B зависит от характера соединения элементов (напряжение одного элемента составляет около 2В). В любом случае значение выходного тока ограничено: типичный элемент мощностью 500 А·ч дает в цепь при $R_i \approx R_e$ ток не более 10 кА за время 1 с.

6.38. В импульсном режиме работы для предохранения батареи необходимо прекращать разряд как можно скорее. Это условие вновь приводит нас к проблеме размыкателя (п. 6.29). Для используемого в настоящее время диапазона длительностей аккумуляторных генераторов, лежащего между 0,1 и 1 с, техническая проблема коммутации таких генераторов представляет меньшую сложность и может быть решена, как показано на фиг. 6.16; путем использования одного или нескольких зашунтированных переключателей S_2 можно уменьшить ток в цепи до безопасного уровня перед размыканием основного переключателя S_1. Задача еще более упрощается, если перед размыканием S_2 и S_1 замыкать кроубар-переключатель S_C (такая схема уже была использована Капицей).

Седьмая глава Импульсные соленоидальные катушки

§ 1. МНОГОВИТКОВАЯ СОЛЕНОИДАЛЬНАЯ КАТУШКА

7.1. После проведенного в предыдущей главе разбора свойств различных простых цепей с целью нахождения протекающего в них полного тока перейдем теперь к изучению соотношения между током и магнитным полем в той части цепи, где магнитное поле непосредственно используется, т. е. в *катушке*. Почти в каждом эксперименте необходимо точно знать конфигурацию поля собственной катушки, и в ряде случаев задача сильно усложняется. Она может быть решена с помощью аналитических, численных или аналоговых методов (их описание дано в гл. 2; в П1 приведены формулы расчета полей). Подходящая конфигурация поля чаще всего определяется просто эмпирическим путем.

В данной главе мы ограничимся рассмотрением лишь одной конфигурации магнитного поля, наиболее часто используемой на практике, а именно, *аксиального поля*, создаваемого *соленоидальным проводником*.

Механические элементы

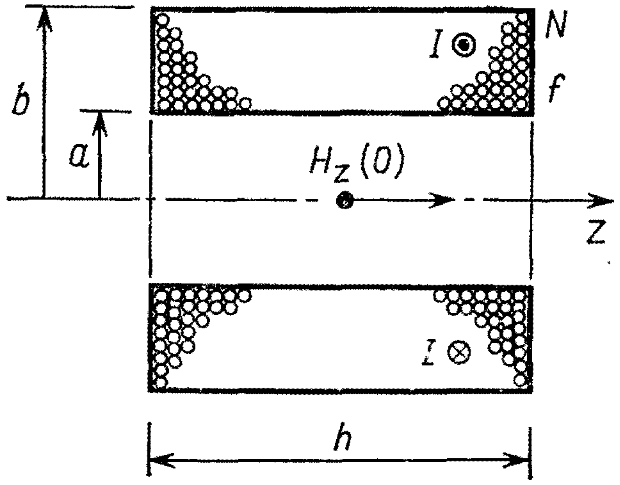
7.2. Если заданы объем поля, его максимальное значение и источник тока, то существует свобода в выборе значений различных параметров соленоида, наиболее важным из которых является полное *число витков* N для катушки данной длины (фиг. 7.1). Выражение для поля как функции тока и других параметров катушки было дано в уравнении (2.49).

Для намотки лучше всего использовать провод прямоугольного сечения, что позволяет получить хороший *коэффициент заполнения* (2.44)

$$f = \frac{N\Sigma}{h\,(b-a)} \tag{7.1}$$

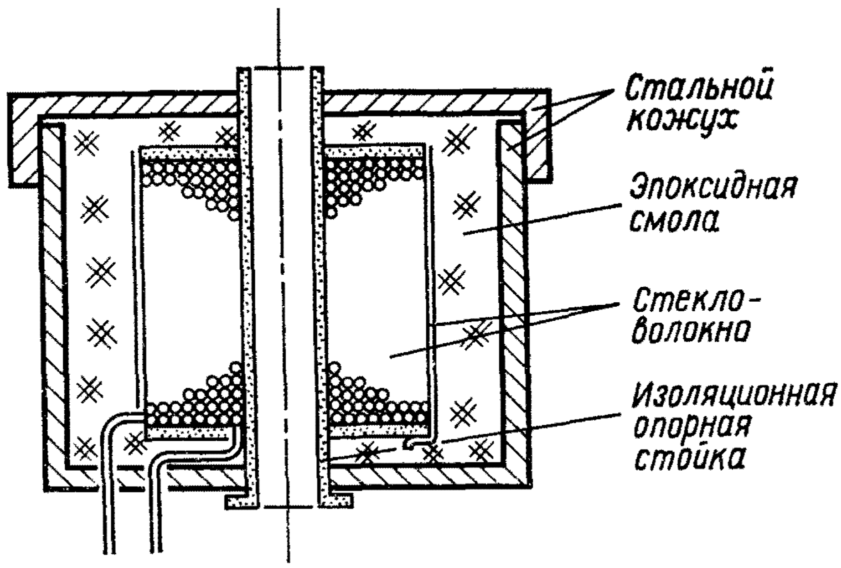
(Σ — площадь поперечного сечения провода) и обеспечивает достаточную механическую прочность благодаря сдерживанию осевых нагрузок (см. п. 5.12).

В импульсном режиме иногда выгодно использовать стальной провод, покрытый медью, стоимость которого невелика (в этом



Фиг. 7.1. Многовитковый соленоид с полным числом витков N и коэффициентом заполнения f.

случае прочность катушки в основном определяется сталью, а электропроводность — медью). Другим применяемым способом повышения прочности катушки является армирование ее стекловолокном, пропитанным эпоксидной смолой, и (или) помещение



Фиг. 7.2. Многовитковый соленоид в кожухе из нержавеющей стали.

ее в кожух из нержавеющей стали (фиг. 7.2). Ван Иттербеек и Ван Дрисше [1.69] в своих опытах использовали предварительно сжатый стальной кожух и в импульсном режиме получали поля величиной около 500 кЭ; однако при таких сильных полях время жизни катушки ограничено. Вообще говоря, многовитковые катушки могут быть использованы без особых трудностей вплоть до 100 кЭ.

Конденсаторная батарея и соленоид

7.3. Технически особенно удобно использовать такой многовитковый соленоид совместно с конденсаторной батареей в качестве источника энергии. Относительно большая индуктивность катушек

$$L_L = \mu_0 N^2 \frac{\pi a^2}{h} K_L \tag{7.2}$$

(величина K_L задана в виде функции от b/a, $h/2a$ на фиг. П1.10) обусловливает очень длинный период разряда и очень низкое значение полного тока I [см., например, уравнения (6.18), (6.19)]. Это позволяет использовать технически простые системы конденсаторных батарей.

Если плотность тока постоянна по сечению провода Σ (т. е. толщина скин-слоя велика по сравнению с размерами провода $\sim \sqrt{\Sigma}$), то сопротивление катушки [с учетом (7.1)] равно

$$R_L = \frac{\pi}{\sigma} \frac{N^2}{fh} \frac{b+a}{b-a}. \tag{7.3}$$

Если предположить также, что индуктивность и сопротивление цепи определяются индуктивностью и сопротивлением катушки, то для параметра цепи, определенного в уравнении (6.8), находим

$$\gamma = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{N}{2\sigma_0 f} \frac{b+a}{b-a} \left(\frac{\pi C}{\mu_0 K_L h a^2} \right)^{1/2}. \tag{7.4}$$

Так как энергия, рассеиваемая постоянным сопротивлением, возрастает с увеличением γ (по крайней мере первоначально, см. фиг. 6.4), то из последнего выражения уже можно сделать вывод, что для эффективной работы генератора магнитного поля необходимо ограничивать число витков N, использовать небольшую емкость C (т. е. при заданной энергии батареи — большое зарядное напряжение) и добиваться хорошего коэффициента заполнения f (т. е. использовать провод прямоугольного поперечного сечения).

7.4. В идеальной, без потерь энергии, цепи с очень длинной катушкой энергия, первоначально запасаемая в конденсаторе,

$$W_0 = \frac{1}{2} U_0^2 C \tag{7.5}$$

преобразуется в энергию магнитного поля, так что

$$H \approx \sqrt{\frac{2W_0}{\mu_0 \pi a^2 h}}. \tag{7.6}$$

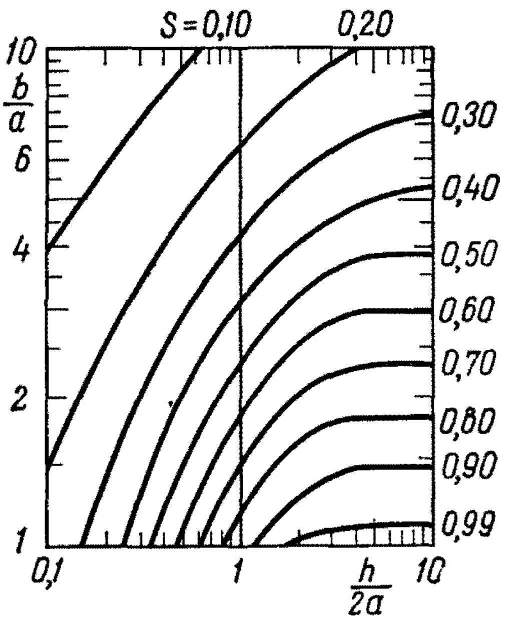
В случае реальной катушки для значения поля в центре можно записать выражение (см. [1.217])

$$H_0 = DS\sqrt{\frac{2W_0}{\mu_0 \pi a^2 h}}. \tag{7.7}$$

Омические потери здесь учтены введением *коэффициента рассеяния*

$$D = \frac{I_m}{I_0} = \frac{I_m}{U_0}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

который определяется с помощью фиг. 6.4 или уравнения (6.24) в виде функции γ, в то время как *формфактор* S определяется



Фиг. 7.3. Формфактор S [1.217].

геометрией и получается из сравнения выражения для поля (2.49) (где $h_1 = h_2 = {}^1/_2 h$) с уравнением (77):

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{10}} 10^{-3} N \sqrt{\frac{h}{L}} \frac{1}{(b/a)-1} \ln\left[\frac{(b/a)+\sqrt{\{(b/a)^2+(h/2a)^2\}}}{1+\sqrt{\{1+(h/2a)^2\}}}\right]. \tag{7.8}$$

Если индуктивность цепи L определяется индуктивностью катушки L ($L_L \approx L$), то формфактор S будет зависеть только от параметров катушки b/a и $h/2a$, и его можно найти с помощью уравнения (7.2):

$$S = \frac{1}{\sqrt{K_L}} \frac{h}{2a} \frac{1}{(b/a)-1} \ln\left[\frac{(b/a)+\sqrt{\{(b/a)^2+(h/2a)^2\}}}{1+\sqrt{\{1+(h/2a)^2\}}}\right]. \tag{7.9}$$

Эта функция изображена на фиг. 7.3. Если, кроме того, сопротивление цепи (7.3) определяется сопротивлением катушки ($R_L \approx \approx R$), то параметр цепи γ и, следовательно, функция D зависят только от параметров катушки и емкости C [см. уравнение (7.4)].

Ограничения, определяемые нагревом

7.5. Хотя при работе в импульсном режиме основные проблемы связаны с механическими эффектами, однако в этом случае нельзя не учитывать последствий, вызываемых джоулевым нагревом. Если сопротивление цепи полностью определяется катушкой, то в режиме однократного действия необходимо выполнение условия

$$\frac{W_0}{\pi f h (b^2 - a^2)} < Q_{\text{плавл}}, \tag{7.10}$$

где $Q_{\text{плавл}}$ — плотность энергии, требуемой на нагрев и плавление проводника (для меди $Q_{\text{плавл}} \approx 6 \cdot 10^9$ Дж·м$^{-3}$, если начальная температура равна 0 °С). Учет эффектов охлаждения и рассеяния энергии в других частях цепи делает условие (7.10) до некоторой степени неточными.

7.6. Более строгое условие может быть получено, если воспользоваться понятием интеграла тока применительно к проводу катушки. С помощью уравнения (4.57) и обозначений, использованных в табл. 4.III, можно получить соотношение, при выполнении которого не происходит плавления проводника:

$$\frac{1}{\Sigma^2} \int_0^t I^2\, dt \leqslant J_{sm}(\theta_0), \tag{7.11}$$

где I — ток, протекающий по проводу с поперечным сечением Σ, J_{sm} — интеграл тока, который зависит от начальной температуры, как показано на фиг. 4.4. Если ставится задача получения очень сильных магнитных полей, может быть выгодным увеличивать значение интеграла тока J_{sm} за счет предварительного охлаждения катушки (как это сделано в опытах Котти, которому таким образом удалось получать поля вплоть до 350 кЭ [4.11]). Дополнительным преимуществом работы при низких температурах является увеличение предела текучести и предела упругости металлов, наиболее важных для техники сильных магнитных полей (1.107).

Например, если для простоты предположить, что

$$H \approx \frac{NI}{h} \approx H_m \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi t}{t_m}\right),$$

и взять интеграл только до $t \to t_m$ (т. е. материал катушки остается в твердой фазе только до момента наступления максимума поля, а затем расплавляется), то, вводя коэффициент заполнения f [уравнение (7.1)], условие (7.11) можно записать в виде следующего выражения:

$$\frac{H_m^2 t_m}{f^2 (b-a)^2} \leqslant 2 J_{sm}(\theta_0). \tag{7.12}$$

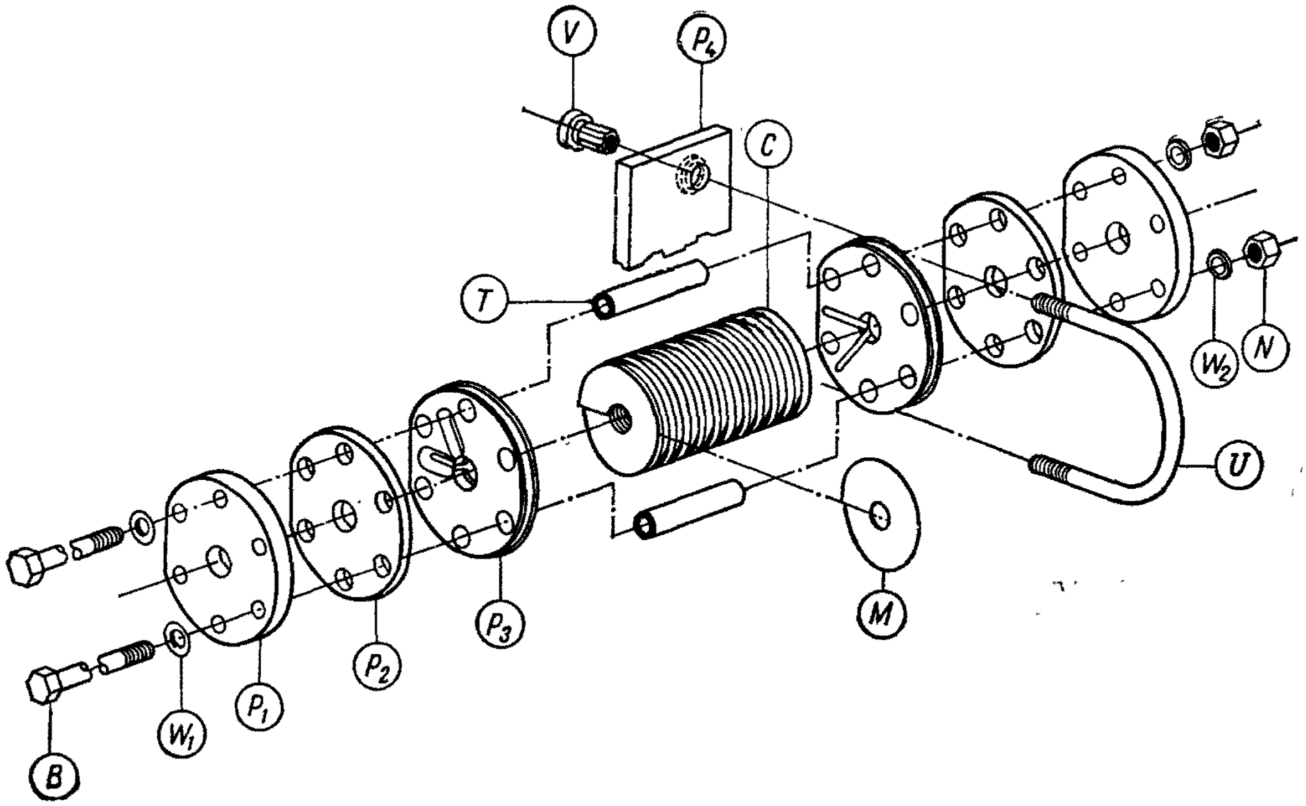
Пример: для $b - a = 0{,}02$ м, $f = 0{,}8$, $t_{\text{макс}} = 4 \cdot 10^{-3}$ с, J_{sm} ($\theta = 20$ °С) $= 9 \cdot 10^{16}$ А$^2 \cdot$с$\cdot$м$^{-4}$ (медь) получаем $H_{\text{макс}} \leqslant 1{,}1 \cdot 10^8$ А$\cdot$м$^{-1}$ (т. е. 1,3 МЭ).

При использовании катушки в режиме последовательной серии разрядов необходима соответствующая оценка эффектов нагрева и охлаждения. Чем больше длительность импульса, тем более важную роль приобретают проблемы, рассмотренные в п. 2.22. Как было упомянуто в п. 1.9, иногда удобно включать катушку в цепь охлаждения, так чтобы перед началом каждого разряда проводник обладал заранее заданной средней температурой.

§ 2. СПИРАЛЬНЫЙ СОЛЕНОИД

Конструкция

7.7. Однослойный *спиральный магнит*, показанный на фиг. 7.4, представляет собой один из наиболее широко используемых типов



Фиг. 7.4. Спиральный соленоид типа Фонера в разобранном виде [7.9].

Каждый из концов спирали C припаивается к электродной пластине P_3, которая прижимается U-образным болтом к шине P_4 для обеспечения электрического контакта; механическая жесткость системы также обеспечивается изоляционными пластинами P_2 и торцевыми пластинами из нержавеющей стали P_1.

катушек для получения импульсных магнитных полей напряженностью более 100 кЭ. Его можно рассматривать как модификацию магнита Биттера, работающего в режиме постоянного тока [7.1]; вместо ряда изолированных, расположенных друг за другом пла-

ТАБЛИЦА 7.1

Спиральные соленоиды (сплав Be — Cu)

Отверстие			Намотка		Параметры импульса		Энергия (конденсаторная батарея)		Литература
внутренний диаметр, см	внешний диаметр, см	длина, см	толщина витка, см	полное число витков	время нарастания, мкс	$H_{макс}$, кЭ	кДж	кВ	
3,8	7,6	6	0,32	16	400	240	75	4	Фонер и Фишер [7.9]
1,9	7,6	6	0,32	15	240	550	75	4	Фонер и Фишер [7.9]
0,63	2,5	2	0,075	19	80	700	9	3	Фонер и Колм [7.2]
2,0	4,1	7	0,127	48	210	200	12	5,3	Кусковский и сотр. [7.10]
1,5	3,6	7,7	0,1	64	160	220	9	3	Потине и сотр. [1.71]
3,2	10	5	0,125	23	50	280	—	11	Милн и сотр. [7.11]

стин он представляет собой катушку, сделанную из цельного металлического цилиндра, профрезерованного по винтовой линии. В этой конструкции отсутствуют контакты и, следовательно, можно избежать электрической дуги, которая возникает при больших плотностях тока, соответствующих полям свыше 100 кЭ. Единственным критическим местом являются точки двух контактов между спиралью и пластинами на ее торцах; было найдено, что если оба проводника сделаны из сплава Be — Cu (как это обычно бывает), то хороший контакт достигается гелиевой сваркой, в то время как применение пайки твердым припоем, как правило, не достигает цели.

7.8. Фонер и Колм [7.2] успешно использовали магнит такого типа для получения полей вплоть до 700 кЭ (табл. 7.I). Большим преимуществом этого магнита является то, что в нем сочетаются относительно большая собственная индуктивность [необходимая для эффективной передачи энергии, см. уравнение (6.35)] и высокая механическая прочность, причем конструкция магнита одинаково хорошо выдерживает осевые и радиальные давления.

Необходимость обеспечения изоляции между витками в этих катушках обычно ограничивает предельное напряжение на конденсаторной батарее величиной менее 10 кВ. Непрерывная винтовая изоляция в катушке обеспечивается двумя слоями радиально разрезанных и вставленных в нее прокладок, причем разрезы соседних прокладок смещены на половину оборота. Для изоляции используются материалы, начиная с высококачественной натуральной слюды или более дешевых прокладок из слюды с неорганическим наполнителем марки GE 78300 и кончая многослойными листами из полиэфирного стекловолокна. Затем вся система зажимается между двумя торцевыми пластинами, образуя единое целое (более подробное описание конструкции можно найти в ссылках, приведенных в табл. 7.I).

Распределение тока

7.9. При присоединении спиральных катушек к низковольтным (несколько киловольт) большим конденсаторным батареям четверть периода разряда (время нарастания) оказывается, как правило, величиной порядка нескольких миллисекунд. Отсюда следует, что, например, для сплава Cu — 2%Be с $1/\sigma \approx 8$ мкОм$\cdot$см толщина скин-слоя в этом случае становится больше 1 см, т. е. сравнимой с диаметром отверстия. Тогда для радиального распределения плотности тока можно записать выражение

$$j(r) = j(a)\left(\frac{a}{r}\right)^n, \tag{7.13}$$

которое получается обобщением соотношения для случая постоянного тока (когда $n = 1$, см. П1.14). При импульсной работе ток концентрируется у внутреннего радиуса a; это означает, что в уравнении (7.13) $n > 1$. Потине и сотр. [1.71] нашли, что для типичных значений периода разряда 1—2 мс выражение (7.13) дает хорошее приближение при $n = 2{,}5$ (в [1.71] также приведены выражения для индуктивности катушки и магнитного поля в центре при распределении тока (7.13)).

Когда толщина изолирующих дисков существенно меньше длины спирального проводника (так что катушка представляет собой почти сплошную металлическую массу), процесс диффузии магнитного поля и все связанные с ним эффекты подобны тем, которые имеют место в одновитковом соленоиде и которые будут рассмотрены в следующих пунктах главы. В частности, если радиус катушки меньше толщины скин-слоя, то у внутренней поверхности имеет место концентрация тока (см. п. 4.18).

На практике использовались различные модификации спиральной катушки. В качестве примера можно упомянуть *катушку Гома*, в которой линейная плотность тока возрастает от центральной плоскости катушки к ее краям за счет соответствующего изменения толщины витков. Для данного значения подводимого тока поле в центре такой катушки больше, чем в аналогичной спиральной катушке с постоянным шагом [1.71].

Типичные результаты, полученные с помощью спиральных соленоидов, представлены в табл. 7.I.

§ 3. ОДНОВИТКОВЫЙ СОЛЕНОИД

Система с батареей конденсаторов

7.10. Одновитковый соленоид, присоединенный к батарее конденсаторов (фиг. 7.5), является широко используемой системой для получения сильных магнитных полей (табл. 7.II). Одно из основных достоинств одновиткового соленоида заключается в простоте и прочности его механической конструкции. С другой стороны, низкая индуктивность такого соленоида требует использования более сложной, «быстрой» батареи конденсаторов с малой паразитной индуктивностью L_S. Вследствие этого четверть периода разряда цепи обычно составляет величину менее 20 мкс, что приводит к малым диффузионным потерям (см. п. 4.13); поэтому в качестве материала катушки во многих случаях может быть использована обычная сталь, несмотря на ее относительно низкую электропроводность.

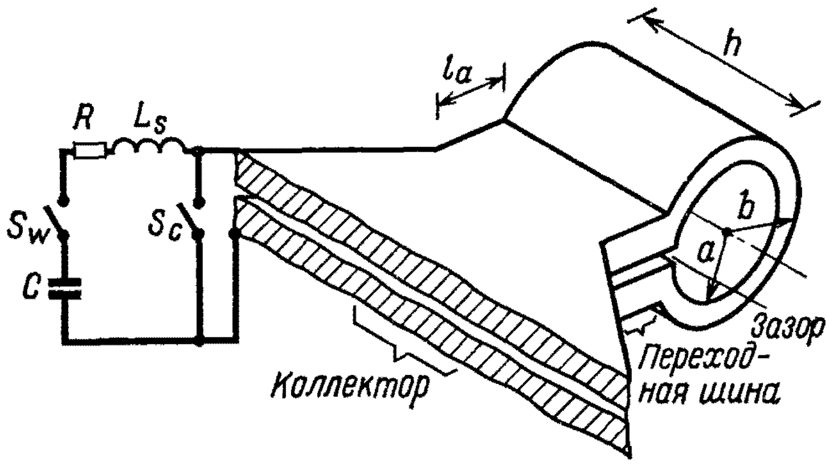
В плазменных экспериментах с θ-пинчами в разрядную систему часто входит присоединенный к катушке *кроубар-замыкатель*

ТАБЛИЦА 7.II

Одновитковые соленоиды

Отверстие		Параметры импульса		Энергия		Литература
внутренний диаметр, см	длина, см	время нарастания, мкс	$H_{макс}$, кЭ	конденсаторная батарея кДж	кВ	
11	770	5,2	25	1100	40	Калемская лаборатория [7.12]
10	150	9,5	180	2670	40	Гарчинг [7.3]
7	14	1,7	230	115	2×40	Гарчинг [7.3]
0,6	1	7	1200	24	4	Ферс, Левин и Ванек [7.16]
0,5	1	3,5	1500	200	15	Кнопфель и Луппи [7.14]
0,34	0,55	3,8	1400	220	125	Шнеерсон [7.6]
0,3	1	3,3	3500	820	70	Ширер [7.35]
0,5	1	1,8	2500	60	15	Форстер и Мартин [1.66]

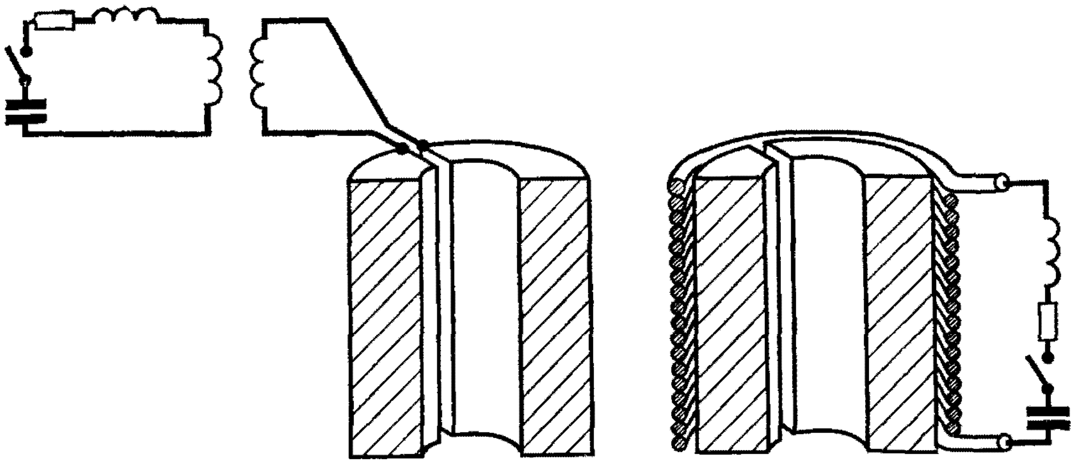
(S_c на фиг. 7.5), отсоединяющий ее от конденсаторной батареи, так что после быстрого нарастания поле затухает с постоянной времени, составляющей, как правило, 50 мкс и более (см. п. 6.17).



Фиг. 7.5. Одновитковый соленоид, связанный непосредственно с конденсаторной батареей.

Концентратор магнитного потока

7.11. Схему соединения одновиткового соленоида и конденсаторной батареи можно улучшить либо введением в цепь трансформатора (п. 6.18), либо использованием *системы концентратора* *потока* (фиг. 7.6). Эти две схемы явно аналогичны, и поэтому концентратор потока можно также рассматривать как *трансформаторную катушку*.

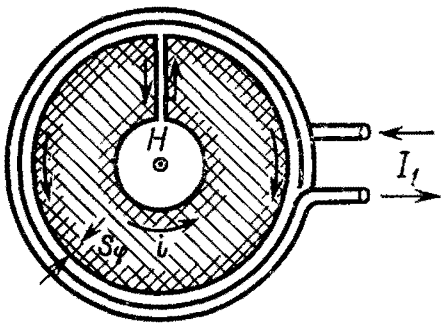


а *б*

Фиг. 7.6. Два возможных способа присоединения одновиткового соленоида к конденсаторной батарее.

а — система с трансформатором, *б* — система концентратора потока.

Как и в случае трансформатора, использование системы концентратора потока вызывает потери энергии, которые должны быть тщательно учтены [7.4]. Из фиг. 7.7 и сказанного в гл. 4



Фиг. 7.7. Концентратор потока.

ясно, что потери энергии обусловливаются главным образом двумя причинами: а) неидеальной связью между концентратором потока и первичной катушкой; б) диффузией магнитного поля в концентраторе потока.

7.12. Система с трансформаторной катушкой является видоизменением системы спирального соленоида, рассмотренной в пп. 7.7—7.9. Одно из достоинств такой модификации заключается в простоте замены концентратора потока, так что в этой системе можно получить различные поля за счет использования подходящих вставок (подробное обсуждение этого вопроса проведено Хаулендом и Фонером [1.16]). Можно добавить, что механическое удержание потока должно обеспечиваться только наружной большой первичной катушкой, поэтому механические проблемы, связанные с сильными магнитными полями, обычно значительно упрощаются.

Распределение тока и магнитного поля

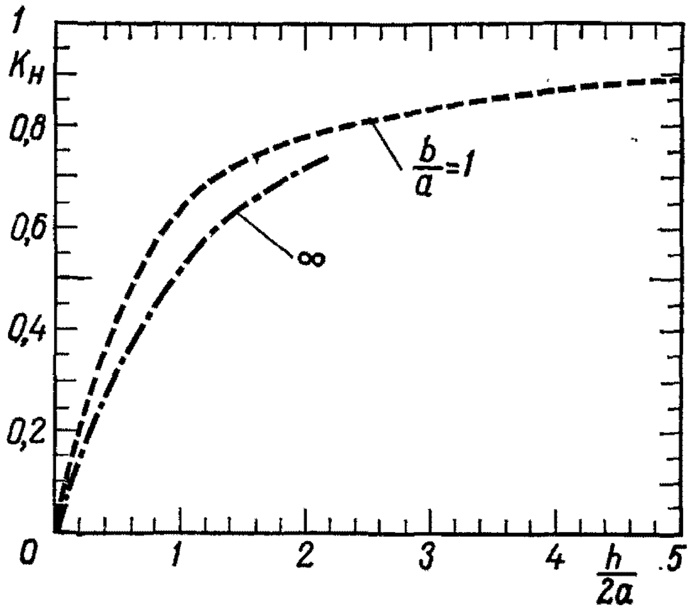
7.13. Для *поля в центре* одновиткового соленоида $H_z(0)$ можно записать

$$H_z(0)=\left(\frac{I}{h}\right)K_H, \tag{7.14}$$

или, в практической системе электрических единиц,

$$H_z(0)=0{,}4\pi\left(\frac{I}{h}\right)K_H, \tag{7.14*}$$

где фактор поля K_H задан в виде функции от $h/2a$ и b/a на фиг. 7.8 и П1.9 для катушек различных геометрий. Как уже упоминалось в п. 2.44, поле в центре одновиткового соленоида уменьшается по



Фиг. 7.8. Фактор поля K_H.

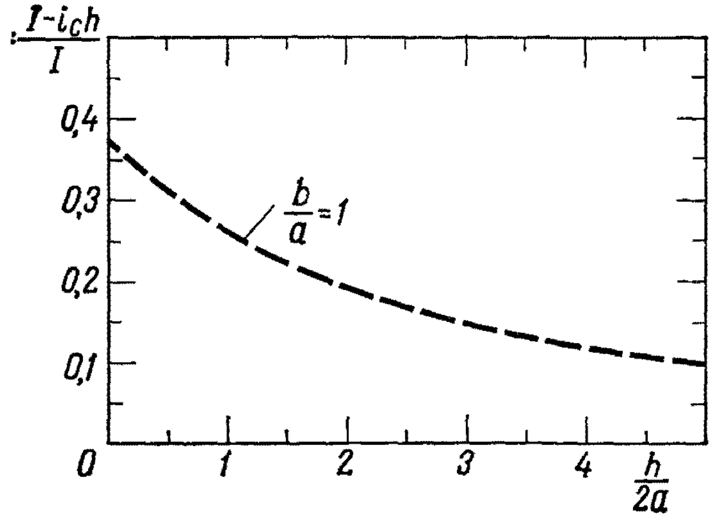
Пунктирные кривые получены из теории потенциала магнитного поля: $b/a = 1$ (см. [2.17]); $b/a = \infty$ (см. [2.18]).

сравнению с полем в катушке при равномерном распределении тока, поскольку ток концентрируется в основном у кромок соленоида или частично даже на наружной поверхности. Роль этого *краевого эффекта* можно охарактеризовать *относительной величиной избытка тока*

$$\eta_I=\frac{I-i_c h}{I}, \tag{7.15}$$

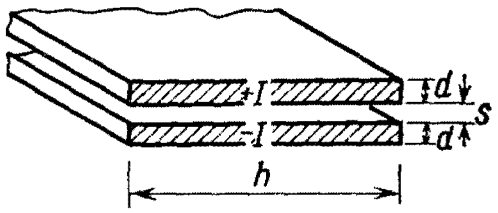
где I — полный ток, i_c — линейная плотность тока, протекающего в средней поперечной плоскости (фиг. 7.9).

7.14. Было найдено, что для *передающей линии в виде параллельных пластин* (с помощью которой одновитковый соленоид обычно присоединяется к источнику тока), характеризуемой отношением h/s (фиг. 7.10), наблюдаются приблизительно те же эффекты, что и для катушек, описанных в предыдущих пунктах [7.5]. Так как для уменьшения индуктивности расстояние между



Фиг. 7.9. Относительная величина избытка тока [см. уравнение (7.15)] Кривая имеет тот же смысл, что и на фиг. 7.8.

пластинами s выбирается как можно меньшим ($s \approx 0{,}1$ см), то отношение h/s (которое нужно сравнивать с отношением $h/2a$ для катушки) обычно очень велико. Поэтому в большинстве случаев такую передающую линию можно описать с достаточной точностью, принимая распределение линейной плотности тока постоянным, как это имеет место в стационарном случае.

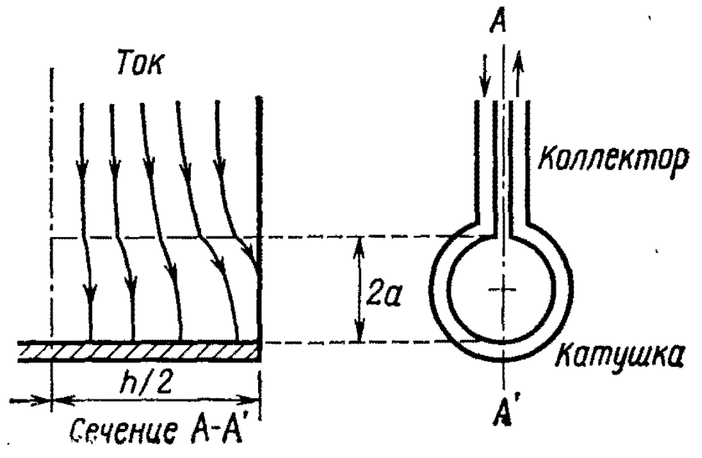


Фиг. 7.10. Передающая линия в виде параллельных пластин.

7.15. Нарушение симметрии поля в реальной одновитковой системе (фиг. 7.5) обусловлено несколькими эффектами. Из них можно выделить три основных:

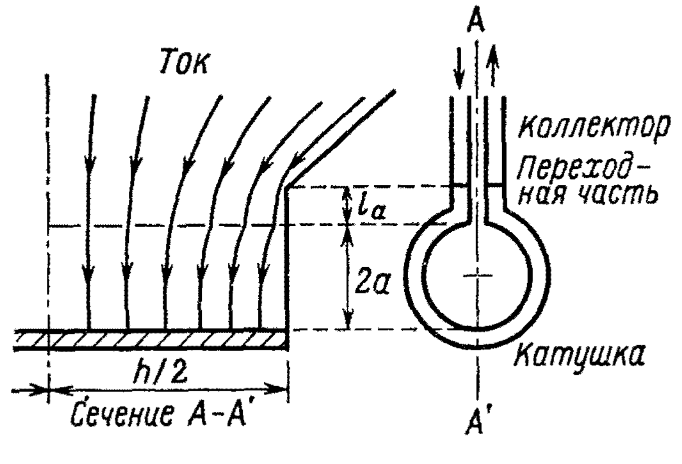
I. «*Краевой эффект*», возрастание линейной плотности тока на краю проводника, что было уже отмечено для соленоида в п. 2.44 и для линии передачи в виде параллельных пластин в п. 7.14.

II. «*Рассогласование*» *краевых эффектов* в месте соединения коллектора и соленоида. Известно, что концентрация тока на краях увеличивается с уменьшением отношения размеров системы (длины катушки к ее диаметру или ширины коллектора к величине зазора). Поэтому краевой эффект будет больше для катушки, что влечет за собой появление осевых токов в области соединения коллектора и соленоида (требование непрерывности тока). Такое изменение распределения плотности тока приводит к изгибу силовых линий магнитного поля по направлению к прорези (фиг. 7.11).



Фиг. 7.11. Эффект перераспределения токов.

III. *Коллекторный эффект.* По практическим причинам (присоединение кабелей и т. д.) ширина коллектора обычно не бывает постоянной, а уменьшается при приближении к катушке. Поэтому

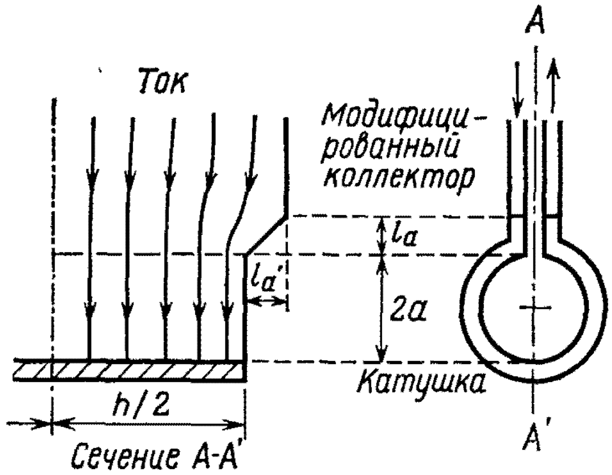


Фиг. 7.12. Коллекторный эффект.

у ее краев концентрируется дополнительная часть тока, что приводит к изгибанию линий поля в сторону, грубо говоря противоположную предыдущему случаю (фиг. 7.12).

7.16. С помощью различных ухищрений можно уменьшить влияние рассмотренных выше эффектов, которые часто бывают нежелательными. Если в катушке сделать щели по направлению линий тока, то распределение тока в соленоиде будет определяться распределением тока в коллекторе, что приведет к уменьшению краевого эффекта (I), а следовательно, и эффекта перераспределения (II). Последний может быть уменьшен также за счет коллекторного эффекта (III) (как показано на фиг. 7.13) или за счет того, что конечный участок коллектора делается прямым и длина его равна по крайней мере ширине соленоида.

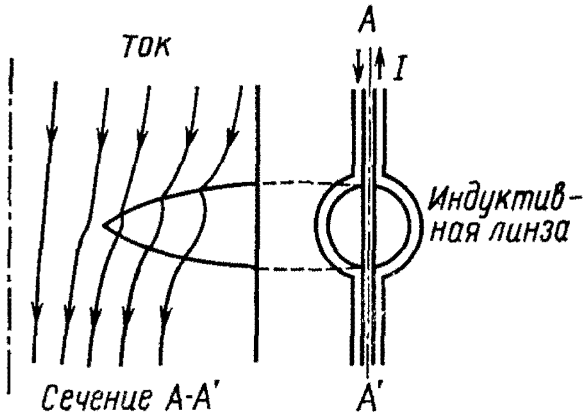
Вообще говоря, на линейное распределение электрического тока можно влиять локальным изменением полного сопротивления



Фиг. 7.13. Компенсация эффекта перераспределения токов и коллекторного эффекта.

Хорошие результаты получаются при $l_a \approx l_a' \approx a$ [7.13].

проводника. В качестве примера упомянем об *индуктивных* «вакуумных» *линзах*, в которых локальное изменение индуктивности достигается изменением геометрии проводника (фиг. 7.14). В зави-

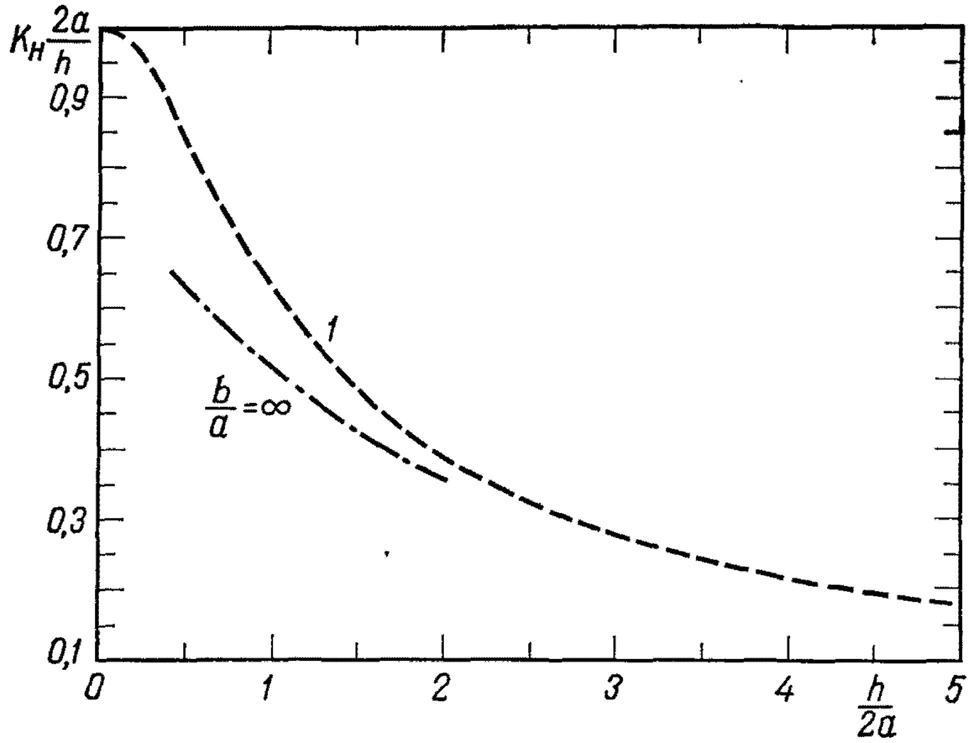


Фиг. 7.14. Индуктивные «вакуумные» линзы (локальное изменение индуктивности достигается изменением расстояния между проводниками).

симости от формы линзы токовые нити могут быть либо сконцентрированы, либо разрежены. В проводниках с переменным сопротивлением можно получить более тонкие и динамические линзовые эффекты, используя временнóе и пространственное различие толщины скин-слоя магнитного потока [6.24].

Ограничения, имеющие место при генерации максимальных полей

7.17. Предположим, что с помощью заданной батареи конденсаторов мы хотим получить максимально возможное значение осевого магнитного поля H_m. Ограничимся рассмотрением одновиткового соленоида. Так как обычно его индуктивность мала по сравнению с индуктивностью батареи, то проблему можно



Фиг. 7.15. Теоретические значения фактора поля в центре катушки для бесконечно толстого [2.18] и тонкого [2.17] соленоидов.

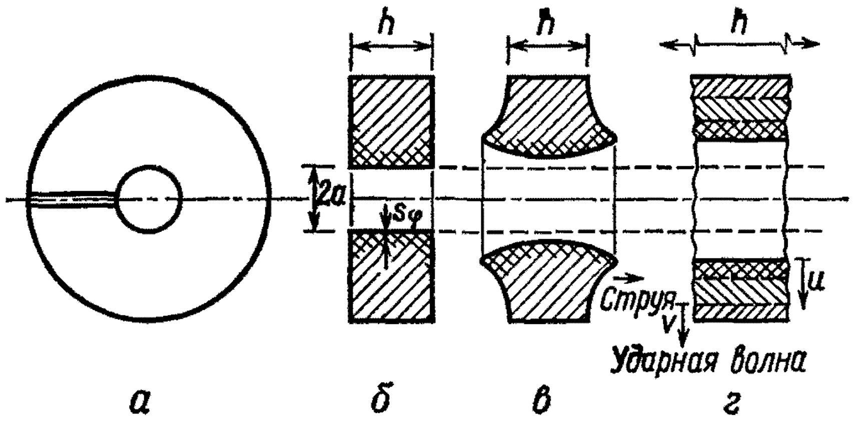
разделить на две самостоятельные части: оптимизацию катушки при наличии заданного полного тока I и определение параметров батареи для получения максимального тока I_m.

Последняя проблема частично определяется расчетом параметров электрической цепи (см. гл. 6) и частично является технической проблемой (см. фиг. 7.17). Говоря об оптимальном выборе геометрии катушки, заметим, что диаметр отверстия катушки обычно фиксирован в соответствии с требованиями эксперимента (диаметр зонда и т. д.). Из кривых фиг. 7.15, которые представляют собой кривые фиг. 7.8, умноженные на $2a/h$, так что ордината

$$K_H \frac{2a}{h} = \frac{H_z(0)}{I} 2a$$

не зависит от длины катушки h, можно видеть, что поле в центре катушки увеличивается с уменьшением ее длины и что выгодно использовать «тонкие» катушки (в этом случае механическая прочность должна обеспечиваться непроводящими зажимами). Минимальное приемлемое значение величины $h/2a$ обычно определяется требованием однородности поля, т. е. допустимой величиной изменения поля на определенном аксиальном отрезке (см. фиг. 2.19 и фиг. П1.8а).

7.18. Причиной отклонения от ожидаемого результата также может являться эффект проникновения поля внутрь проводника (фиг. 7.16, *б*), особенно в том случае, когда толщина скин-слоя магнитного потока $s_ф$ становится сравнимой с радиусом проводника (табл. 4.II и 4.IV). Для точной оценки картины поля тогда необходимо принимать во внимание тот факт, что область тока



Ф и г. 7.16. Деформация одновитковой катушки в результате воздействия очень сильных магнитных полей.

не ограничивается бесконечно тонким поверхностным слоем, а происходит проникновение тока на глубину, приблизительно равную толщине скин-слоя $s_ф$.

В случае работы с сильными магнитными полями (величина которых, однако, недостаточна для плавления проводника или даже для превышения предела текучести) необходимо тщательно избегать локальных перегревов, которые могут неожиданно разрушить катушку. Например, если вдруг начнет развиваться «эффект пилы» (п. 4.18) в месте небольшой неоднородности на кромке проводника, то этот вырез быстро проникнет внутрь проводника и после нескольких импульсов разрушит катушку.

7.19. Когда поле достигает величины, при которой превышается предел текучести металла, катушка начинает деформироваться и в случае достаточно короткого соленоида средний диаметр возрастает с радиальной скоростью u, так как масса катушки выталкивается в направлении оси под действием большого магнитного давления (фиг. 7.16, *в*). Этот эффект гораздо ярче выражен, когда металл начинает плавиться, т. е. при полях, превышающих приблизительно 1,2 МЭ.

Формально можно считать, что радиальное расширение катушки приводит к появлению переменной индуктивности катушки L_L, вследствие чего «сопротивление» LCR-цепи возрастает (п. 6.11). Для типичной катушки, предназначенной для получения сильных магнитных полей, при начальном отношении ее размеров $h/2a = 2$ и при скорости расширения $u = 0{,}2$ см/мкс из уравнения (7.2) находим $dL_L/dt \approx 3$ мОм, т. е. получаем величину того же порядка (если не больше), что и сопротивление типичной цепи конденсаторной батареи (см. фиг. 6.5). Этот результат означает, что величина максимального тока I_m может существенно зависеть от рассматриваемого эффекта. Добавим, что при изменении геометрии катушки происходит уменьшение и самого магнитного поля [см. уравнение (7.14)]. Можно до некоторой степени избежать выталкивания массы, если иметь достаточно короткий импульс тока (максимум которого достигается раньше, чем образуется струя металла) или если иметь достаточно длинный соленоид (что увеличивает время, необходимое для выброса центральных частей катушки соленоида). На практике оба эти условия выполнить не очень легко, так как для этого потребуется использовать более энергоемкую или более «быструю» конденсаторную батарею. Отметим, что для получения более коротких времен нарастания тока и, следовательно, более высоких максимальных полей можно было бы использовать переключающую систему, описанную в п. 6.28.

7.20. При еще более высоких полях (свыше 2 МЭ) большая величина импульсного магнитного давления порождает ударную волну, распространяющуюся внутрь проводника (фиг. 7.16, *г*). Это вызывает быстрое радиальное расширение внутренней поверхности соленоида со скоростью, которая для меди равна (см. п. 5.4) $u \approx 1{,}45 \cdot 10^{-5}\ H^{3/2}$ (см$\cdot$мкс$^{-1}$, Э) (при 4МЭ получаем $u \approx 0{,}12$ см$\cdot$мкс$^{-1}$). Увеличение диаметра катушки происходит даже в отсутствие какого-либо осевого перемещения металла; поэтому упомянутый эффект является основным ограничением, имеющим место при генерации мегаэрстедных полей.

В дополнение к сказанному следует упомянуть, что при работе с мегаэрстедными полями начинают мешать различные поверхностные эффекты (как будет подробно описано в пп. 9.22—9.33), в особенности испарение поверхности металла и проникновение паров во внутреннее пространство катушки. Вследствие сложности этих эффектов, а также вследствие того, что на практике расширение катушки в результате действия ударной волны сочетается с осевым выбрасыванием металла, очень трудно дать количественный расчет для катушек при работе со сверхсильными полями [7.35]. Как показывают и приведенный выше элементарный анализ, и экстраполяция имеющихся в настоящее время экспериментальных результатов (табл. 7.II), по-видимому, для получения полей величиной 4 МЭ или более требуются батареи конденсаторов с энергией порядка мегаджоулей и длительностью четверти периода разряда менее 3 мкс.

Результаты экспериментов по созданию мегаэрстедных полей

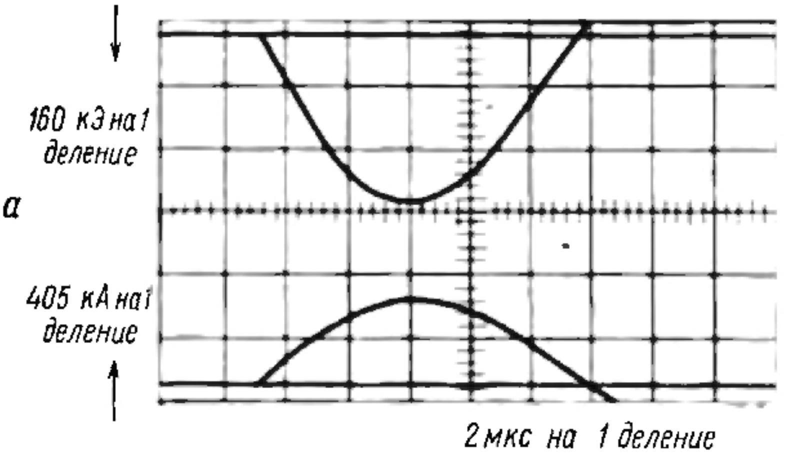
7.21. После работ Ферса и Ванека [7.16б], которые получили поля свыше 1 МЭ при помощи одновиткового соленоида, присоединенного к конденсаторной батарее, различные исследователи

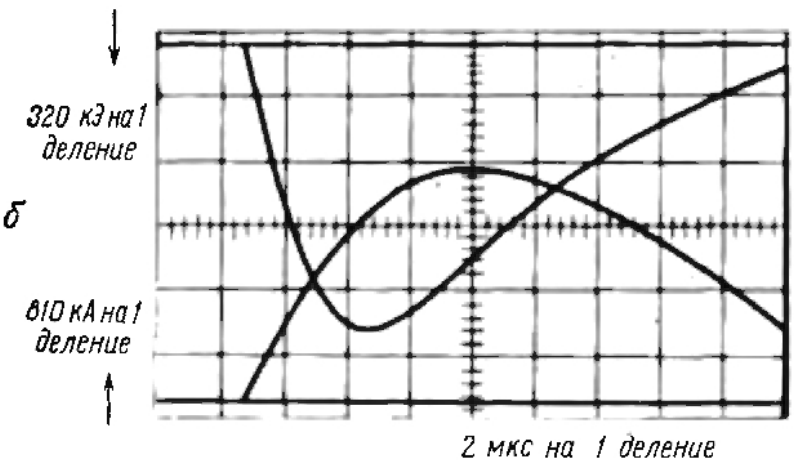
Фиг. 7.17. Одновитковый соленоид с диаметром отверстия 1 см, смонтированный на коллекторе батареи в 200 кДж (см. фиг. 6.5).

использовали аналогичное оборудование, пытаясь достичь мультимегаэрстедных полей (табл. 7.II). Шнеерсон [7.6—7.8] осуществил ряд экспериментов, в которых он проанализировал и оценил конечную и остаточную деформацию массивных соленоидов, сделанных из различных металлов, включая сплав Вуда. Используя высоковольтную батарею конденсаторов, он мог увеличивать величину магнитного поля (в момент первого максимума) линейно с напряжением на батарее вплоть до 1,2 МЭ при работе с алюминиевыми, медными и латунными катушками и вплоть до 1,4 МЭ при работе со стальными катушками. Результаты показали, что при таких полях нет каких-либо заметных источников потерь энергии (как, например, аномальная диффузия или выбрасывание металла), если только время нарастания остается меньше 5 мкс. В системе, использованной Ширером [7.35], массивная катушка,

Фиг. 7.18. Одновитковые соленоиды разных размеров, сделанные из различных металлов, до и после «выстрела» [7.14].

которая полностью уничтожалась после каждого разряда, прикреплялась к главному коллектору при помощи гибкого пла-

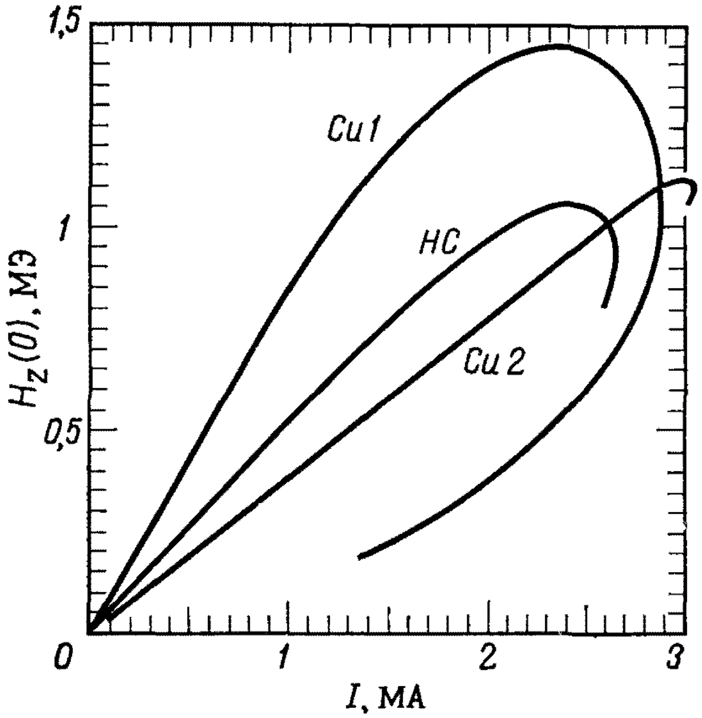




Фиг. 7.19. Осциллограммы напряженности магнитного поля в катушке и тока в случае низкого (*а*) и высокого (*б*) (H_m = 1,45 МЭ) значений поля.
Катушка изображена на фиг. 7.18.

стинчатого соединения, представляющего собой практичную и безопасную механическую развязывающую систему. В работе Форстера и Мартина [1.66] использовалась очень простая конструкция катушки (изгибом медной пластины толщиной 1 мм создавался одновитковый соленоид, который погружался в трансформаторное масло); это требовало очень большой скорости подвода энергии, так чтобы благодаря инерции катушка не успевала расшириться.

7.22. На фиг. 7.17 показано крепление одновиткового соленоида на коллекторе конденсаторной батареи энергоемкостью 200 кДж (см. фиг. 6.5). При работе с сильными полями вкладыш катушки разрушается при каждом «выстреле» (фиг. 7.18), но он



Фиг. 7.20. Кривые зависимости поля от тока, полученные для системы с одновитковой катушкой (см. фиг. 7.17 и 7.18).

Cu 1: катушка из меди диаметром 0,2 см, длиной 1 см (случай, изображенный на фиг. 7.19, *б*);
Cu2: катушка из меди диаметром 1 см, длиной 2 см;
НС: катушка из нержавеющей стали диаметром 1 см, длиной 1 см.

может быть легко заменен. Осциллограммы на фиг. 7.19 относятся к случаю «выстрела» с относительно низким значением поля (*а*), при котором ток и поле находятся в фазе, и к случаю «выстрела» с полем 1,5 МЭ (*б*), при котором максимум поля достигается почти на 4 мкс раньше максимума тока (объяснение см. в п. 7.19). На фиг. 7.20 изображены кривые зависимости поля от тока для этой системы; видно, что в области 1 МЭ происходит отклонение от линейности (т. е. начинается деформация катушки) и это отклонение зависит от материала катушки и ее геометрии.

Как видно из фиг. 7.15, для получения высоких значений магнитных полей более выгодно использовать «тонкие» катушки (так при $h/2a = 0{,}5\ \ldots\ 1$ можно получить выигрыш от 10 до 25% величины поля на единицу полного тока через катушку); но это преимущество достигается ценой больших механических усилий.

Восьмая глава Компрессия магнитного потока

§ 1. ФОРМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЦЕПИ

8.1. Сжатие магнитного потока является одним из интереснейших методов получения больших импульсных электромагнитных мощностей, порядка 10^{11} Вт и выше. В системах, работающих по принципу сжатия потока, замкнутый проводник, ограничивающий магнитный поток ϕ, сжимается внешними силами, в результате чего механическая энергия переходит в магнитную. Этот метод преобразования весьма эффективен лишь до тех пор, пока невелики (обычно менее 50%) потери потока. Поэтому в данной и последующих главах основное внимание будет уделено проблемам, связанным с балансом потока.

Системы со сжатием потока можно грубо разделить на два класса.

а) *Генераторы тока* или *энергии*, в которых сжимаемый объем и индуктивная нагрузка обычно разделены; такие генераторы, а также основные принципы процесса сжатия потока описаны в настоящей главе.

б) *Генераторы энергии высоких плотностей*, в которых сверхсильные магнитные поля создаются при радиальном схлопывании цилиндрического пустотелого проводника; такие генераторы будут описаны в гл. 9, где также будут рассмотрены наиболее важные проблемы, связанные с генерацией магнитных полей предельно высоких напряженностей.

Электрическая цепь с компрессией магнитного потока

8.2. Систему сжатия магнитного потока можно описать простой электрической цепью, приведенной на фиг. 8.1, в которую введена зависящая от времени индуктивность

$$L(t) = L_C(t) + L_L, \tag{8.1}$$

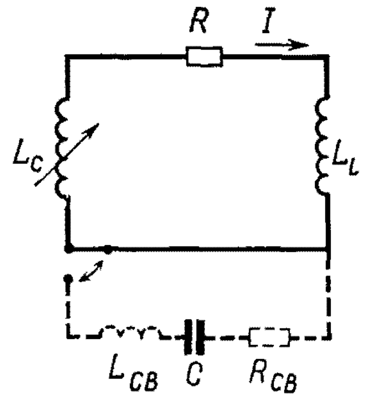
образованная из постоянной *индуктивности нагрузки* L_L и *«сжимаемой» индуктивности* $L_C(t)$. Сопротивление $R(t)$ формально включает в себя все *потери магнитного потока*. Ток I, протекающий по этой цепи, определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d(LI)}{dt}+RI=0. \qquad (8.2)$$

Решая это уравнение относительно потока $\phi=LI$, для любого момента времени t получим

$$LI=L_0 I_{C_0}\exp\left\{-\int_0^t\left(\frac{R}{L}\right)dt\right\}, \qquad (8.3)$$

где I_{C_0} — ток и $L_0=L_{C_0}+L_L$ — полная индуктивность в момент



Фиг. 8.1. Эквивалентная электрическая схема кумулятивной системы.

времени $t=0$. Вводя *коэффициент компрессии потока*

$$\lambda(t)=\frac{LI}{L_0 I_{C_0}}=\exp\left\{-\int_0^t \frac{R}{L}\,dt\right\} \qquad (8.4)$$

и коэффициент изменения индуктивности

$$\gamma_L(t)=\frac{L_0}{L}, \qquad (8.5)$$

можно переписать уравнение (8.3) в виде

$$\frac{I(t)}{I_{C_0}}=\gamma_I(t)=\gamma_L(t)\,\lambda(t), \qquad (8.6)$$

где γ_I — *коэффициент усиления по току*. Так как обычно магнитное поле пропорционально току, т. е. $I/I_{C_0}\approx H/H_0$, это уравнение описывает в первом приближении также и закон возрастания магнитного поля в генераторах с компрессией магнитного потока.

8.3. Умножая (8.2) на I и производя перестановку, получаем *уравнение энергии*

$$-\frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dt} = RI^2 + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} LI^2\right]. \tag{8.7}$$

Отсюда видно, что работа, произведенная внешними силами по уменьшению индуктивности, частично теряется за счет джоулева тепла. Оставшаяся энергия увеличивает потенциальную магнитную энергию цепи W, для которой можно написать

$$\frac{W(t)}{W_{M_0}} = \frac{J}{L_0} \frac{I^2}{I^2_{C_0}}, \tag{8.8}$$

где

$$W_{M_0} = \frac{1}{2} L_0 I^2_{C_0} \tag{8.9}$$

есть начальная энергия. Используя введенные ранее коэффициенты, уравнение (8.8) можно переписать в виде

$$\frac{W(t)}{W_{M_0}} = \gamma_L(t)\, \lambda^2(t). \tag{8.10}$$

Это соотношение можно рассматривать как основное уравнение для генераторов энергии. Например, плоским генератором типа «кузнечные меха» [1]) (см. п. 8.23) присущи относительно низкие значения γ_L (50—100) при больших коэффициентах компрессии потока (0,5—0,9) (см. табл. 8.1), в то время как генераторы спиральной конструкции характеризуются очень большими значениями γ_L и относительно низкими λ.

8.4. Существует ряд возможностей развития простой схемы, приведенной на фиг. 8.1. Интересная система получается при введении *трансформатора*, как показано на фиг. 8.2.

Метод решения уравнения для этой цепи аналогичен использованному в п. 6.18. Из основных уравнений цепи

$$\frac{d(L_C I_1)}{dt} + RI_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = 0,$$

$$(L_L + L_2) \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = 0,$$

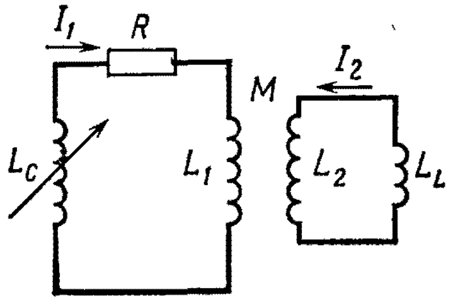
предполагая для простоты, что трансформатор не имеет потерь [$K=1$ в (6.37)] и $R \approx 0$, $L_{C_0} \gg L_L$, получим выражение для максимального коэффициента усиления по току:

$$\frac{I_2}{I_{C_0}} \approx \frac{L_0}{L_L} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \tag{8.11}$$

---

[1]) Хотя эти генераторы конструктивно относятся к плоским, термин «кузнечные меха» было решено сохранить как наиболее соответствующий внешним формам этой системы (см., например, фиг. 8.17).— *Прим. перев.*

Отсюда видно, что максимальный ток в нагрузке такой системы больше, чем в системе, описываемой уравнением (8.6), и это увеличение определяется коэффициентом трансформации ($\sqrt{L_2/L_1}$). На практике в трансформаторе всегда имеются потери, особенно



Фиг. 8.2. Включение трансформатора в цепь кумулятивной системы.

когда необходимо получить высокую плотность тока, так что возможности использования трансформатора определяются только конкретными экспериментальными условиями.

Начальные условия

8.5. Одним из наиболее удобных способов создания в генераторе начального потока ϕ_0 или энергии W_{M_0} является разряд на него *конденсаторной батареи.* Если U; C, L_{CB}, $W_{BC} = {}^1/_2 U^2 C$ — соответственно зарядное напряжение, емкость, индуктивность и энергия, запасенная в конденсаторной батарее (фиг. 8.1), то максимальный поток в системе будет равен

$$\phi_0 = I_{C_0} L_0 = DU \sqrt{\frac{C}{L_0 + L_{CB}}}\, L_0, \tag{8.12}$$

где коэффициент затухания $D = I_{C_0}/I_0$ для цепи с полным сопротивлением $R_{\text{полн}} = R_{CB} + R$ и индуктивностью $L_{\text{полн}} = L_0 + L_{CB}$ можно непосредственно определить из фиг. 6.4. В типичных экспериментальных установках значение D лежит между 0,7 и 0,8 [8.15]. Комбинируя (8.10) и (8.12), можно определить «эффективность накачки», т. е. энергию, переданную из батареи в нагрузку,

$$\frac{W_L}{W_{CB}} = \gamma_L \lambda^2 D^2 \frac{L_0}{L_0 + L_{CB}}. \tag{8.13}$$

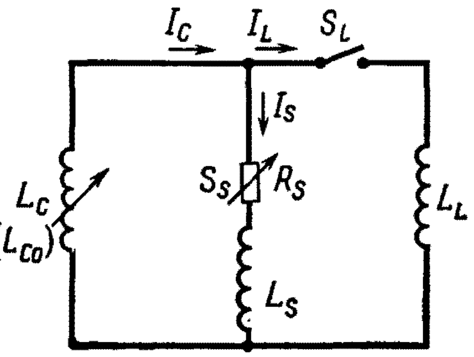
Подключение нагрузки L_L непосредственно к батарее без системы сжатия ($L_C \equiv 0$ на фиг. 8.1) дает

$$\frac{W_L^*}{W_{CB}} \approx D^2 \frac{L_L}{L_L + L_{CB}}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что система сжатия не только увеличивает в процессе компрессии магнитного потока энергию, введенную от батареи, но действует и как индуктивный трансформатор, включенный между источником тока и нагрузкой. Эта трансформация становится особенно существенной, когда, с одной стороны, $L_L \ll L_{CB}$, а с другой, $L_{C_0} \gg L_{CB}$.

Проблемы переключения

8.6. Как будет видно из дальнейшего, одним из основных недостатков генераторов, работающих по принципу компрессии потока, является относительно большое время сжатия (обычно около



Фиг. 8.3. Эквивалентная электрическая схема магнитокумулятивного (МК) генератора с ключами: замыкателем S_L и размыкателем S_S.

100 мкс; см., например, фиг. 8.16), в течение которого нагрузка находится под напряжением. Однако в большинстве экспериментов необходимо, чтобы поле достигало необходимых значений за время порядка 10 мкс или меньше [1.153].

Эту трудность можно обойти, используя систему, эквивалентная схема которой приведена на фиг. 8.3 и которая может рассматриваться как обобщение схемы, обсуждавшейся в п. 6.22. Первая часть процесса компрессии происходит в левой части цепи, когда ток через нагрузку L_L не течет; после замыкания *ключа* S_L и размыкания *ключа* S_S сжатие продолжается и часть магнитной энергии, заключенной в L_C, переходит в L_L. Наиболее критическим элементом этой системы является *размыкающийся ключ* S_S, представляющий собой переменное сопротивление R_S, величина которого должна возрастать очень быстро (в идеальном случае мгновенно) в течение времени разрыва Δt.

8.7. Уравнения, описывающие цепь на фиг. 8.3, имеют следующий вид:

$$-\frac{d(L_C I_C)}{dt} = I_S R_S + L_S \frac{dI_S}{dt}, \quad (8.14)$$

$$L_L \frac{dI_L}{dt} = I_S R_S + L_S \frac{dI_S}{dt}, \quad (8.15)$$

$$I_C = I_S + I_L. \quad (8.16)$$

В момент времени $t=0$, когда замыкается ключ S_L, начальные условия определяются как

$$I_C = I_S \equiv I_{S_0} \tag{8.17}$$

и переменная индуктивность L_C имеет величину

$$L_C\,(t=0) = L_{C_0}. \tag{8.18}$$

Отсюда магнитный поток во внешней цепи, в которую входят L_C и L_L, равен

$$\phi_{C_0} = L_{C_0} \cdot I_{S_0}. \tag{8.19}$$

Начальный ток I_{S_0} может быть создан, например, за счет предварительной компрессии потока, происходившей в левой части цепи в течение всего времени, пока ключ S_L был разомкнут, т. е. до момента $t=0$, а этот процесс аналогичен обсуждавшемуся при рассмотрении цепи, приведенной на фиг. 8.1.

8.8. В момент времени $t=0$ магнитная энергия в левой части цепи равна

$$W_C = \frac{\phi_C^2}{2\,(L_{C_0}+L_S)}, \tag{8.20}$$

где полный поток ϕ_C определяется очевидным соотношением

$$\phi_C = \frac{L_{C_0}+L_S}{L_{C_0}}\,\phi_{C_0}. \tag{8.21}$$

Если индуктивность $L_C = L_{C_0}$ остается постоянной, то, как показано в п. 6.23, эффективность передачи энергии, накопленной в этой индуктивности (W_C), в нагрузку (W_L), в лучшем случае составляет только 25%. Если в течение времени, когда ключ S_S разомкнут, продолжается компрессия поля до значений $L_C \to 0$, то в конце процесса магнитный поток в L_L будет равен ϕ_{C_0}, так что для *эффективности преобразования* энергии получим

$$\eta = \frac{W_L}{W_C} = \frac{L_{C_0}}{L_{C_0}+L_S}\,\frac{L_{C_0}}{L_L}. \tag{8.22}$$

Так как нам приходится иметь дело с магнитной энергией (и, следовательно, необходимо сохранить максимальную внешнюю энергию), важно, чтобы ключ S_S был разомкнут возможно скорее после замыкания ключа S_L. В противном случае заметное количество магнитной энергии будет введено в индуктивность L_S и потеряно. С этой точки зрения желательно, чтобы L_S имела возможно большую величину, так как для одинаковых значений потока потери энергии, очевидно, уменьшаются с возрастанием L_S.

8.9. Для многих приложений наиболее важной характеристикой цепи является *скорость нарастания тока* в нагрузке

[1.153], или, точнее, величина $(dI_L/dt)_{t=0}$ при замыкании ключа S_L. Из уравнения (8.16) и закона сохранения потока $\phi_{C_0} = L_C I_C + L_L I_L$ следует, что

$$I_S = \frac{\phi_{C_0} - I_L (L_L + L_C)}{L_C}. \tag{8.23}$$

Используя это выражение в (8.15), после соответствующих преобразований получаем дифференциальное уравнение с зависящими от времени параметрами

$$\frac{dI_L}{dt}\{L_L L_C^2 + L_S L_C (L_L + L_C)\} + I_L \{L_C R_S (L_L + L_C) + L_S L_L \cdot \beta\} - \phi_{C_0} (L_C R_S + L_S \cdot \beta) = 0, \tag{8.24}$$

где скорость компрессии магнитного потока определяется как

$$\beta = -\frac{dL_C}{dt}. \tag{8.25}$$

В момент времени $t=0$ имеем $I_L = 0$ (и $L_C = L_{C_0}$), так что для скорости нарастания тока имеем

$$\left.\frac{dI_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\phi_{C_0} [R_S + \beta L_S / L_{C_0}]}{L_L L_{C_0} + L_S L_L + L_S L_{C_0}}. \tag{8.26}$$

Из этого соотношения ясно видно, что скорость нарастания тока может быть обеспечена в одном из двух используемых вариантов.

а) **Вариант с сопротивлением.** Ключ S_S открывается в момент $t = 0$, когда замыкается ключ S_L. Практически в этот момент сопротивление R_S должно быть очень велико, чтобы на нагрузке возникло очень большое напряжение. Этого можно добиться, используя эффект очень быстрого увеличения сопротивления при электрическом взрыве проводника подходящих размеров, как описано в п. 6.29.

б) **Вариант с индуктивностью.** В этом случае в цепи отсутствует размыкающий ключ, т. е. $R_S \to 0$, и уравнение (8.26) может быть переписано в виде

$$\left.\frac{dI_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\beta (I_{S_0} L_S)}{L_L L_{C_0} + L_S L_L + L_S L_{C_0}}, \tag{8.27}$$

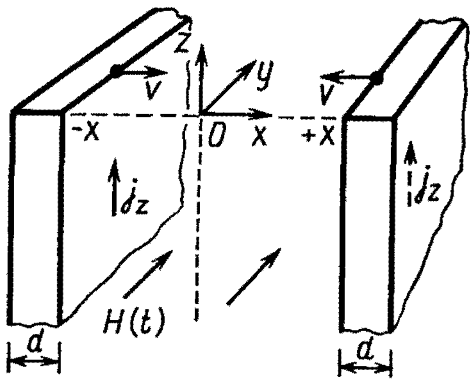
откуда видно, что dI_L/dt возрастает с увеличением потока $(I_{S_0} L_S)$, теряемого в момент времени $t = 0$ в шунтирующей индуктивности L_S. С другой стороны, из соотношения (8.22) следует, что величину L_S необходимо поддерживать в определенных пределах ($L_{S_0} \leqslant L_{C_0}$), чтобы обеспечить разумные величины эффективности преобразования энергии.

§ 2. КОМПРЕССИЯ МАГНИТНОГО ПОТОКА НЕСЖИМАЕМЫМИ ПЛОСКИМИ ПРОВОДНИКАМИ

Усиление поля

8.10. Рассмотрим случай идеальной компрессии в геометрии, схематически показанной на фиг. 8.4, когда два бесконечных параллельных *плоских проводника* сближаются со скоростью v. Ввиду симметрии задачи удобнее рассматривать только один проводник (*поршень*), движущийся к идеально симметричной ему стенке со скоростью v.

Так как практически скорость поршня (обычно составляющая от 0,1 до 1 см/мкс, если поршень разгоняется продуктами мощного взрыва) намного меньше скорости света c, можно считать,



Фиг. 8.4. Плоскопараллельная кумулятивная система.

что поле изменяется одновременно во всем сжимаемом объеме, т. е. использовать квазистационарную электромагнитную теорию, рассмотренную в гл. 2. Если поршень будет двигаться со скоростью, близкой к c, то, как показано в работе [8.13], конечное магнитное поле будет больше предсказываемого квазистационарной теорией [1]).

8.11. Рассмотрим теперь простой случай толстого ($d \gg s_\varphi$) несжимаемого поршня с постоянной проводимостью $\sigma = \sigma_0$, сжимающего начальный поток $\mu_0 H_0 l_0$ с постоянной скоростью v_0 (фиг. 8.5). В процессе сжатия в проводник будет проникать некоторая часть потока, поэтому баланс потока должен быть записан в виде

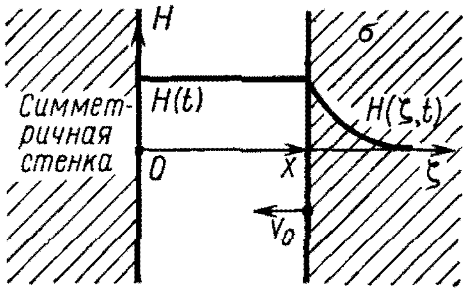
$$\mu_0 H l = \mu_0 H_0 l_0, \tag{8.28}$$

[1]) В качестве иллюстрации рассмотрим идеальный случай, когда плоский бесконечно проводящий поршень, начавший движение в момент $t = 0$, сжимает постоянное начальное поле H_0 с постоянной скоростью v_0. Магнитный поток между поршнем (находящимся в положении $v_0 t$ от начала отсчета) и ушедшей вперед «магнитной ударной волной» (с координатой ct) увеличивается. Следовательно, поле в этой области будет больше на величину H_1, которая определяется законом сохранения потока: $H_1 (c - v_0) = H_0 c$.

где

$$l = x + s_\varphi; \tag{8.29}$$

s_φ — толщина скин-слоя для магнитного потока, введенная и рассмотренная в гл. 3. Для большинства практически важных случаев эта формулировка позволяет с достаточной точностью оценить динамику компрессии.



Фиг. 8.5. Плоский поршень конечной проводимости.

8.12. Можно провести простые оценки, если предположить, что поле на поверхности поршня изменяется в процессе компрессии как

$$H(0, t) = H_0 e^{t/\tau}, \tag{8.30}$$

где характеристическое время τ можно аппроксимировать как предельное время, упоминавшееся в п. 3.13:

$$\tau = \frac{H}{dH/dt} = -\frac{l}{dl/dt} \approx \frac{x}{v}, \qquad v = -\frac{dx}{dt}. \tag{8.31}$$

При этом, безусловно, подразумевается, что потери потока и скорость проникновения диффундирующего в поршень поля ограничены, т. е. $s_\varphi \ll x$ и $ds_\varphi/dt \ll v$. Такое приближение, в котором нарастание поля рассматривается как временна́я последовательность экспоненциальных функций с переменной τ, иногда называют *методом скин-слоя* [8.6]. Его физическое обоснование базируется на том факте, что при непрерывно возрастающем поле роль параметров диффузии поля, таких, как, например, толщина скин-слоя, существующих в данный момент, преобладает, а вклад существовавших (начальных) условий ($H_0 \exp\{-\zeta/s_\varphi\}$, см. следующее соотношение) быстро уменьшается.

Конечное распределение поля в проводнике можно получить из уравнения (3.34):

$$H(\zeta, t) = H_0 \exp\left\{\frac{t}{\tau} - \frac{\zeta}{s_\varphi}\right\},$$

и соответственно для плотности тока

$$j(\zeta, t) = -\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{H(\zeta, t)}{s_\varphi}; \tag{8.32}$$

здесь

$$s_\varphi = \sqrt{(\varkappa_0 \tau)} \tag{8.33}$$

есть толщина скин-слоя для потока, а $\varkappa_0$ — коэффициент диффузии магнитного поля [см. 3.6)].

Используя закон электромагнитной индукции (п. 2.5), можно записать выражение для поверхностного электрического поля

$$E^*(0,\ t) \equiv \frac{j(0,\ t)}{\sigma_0} = -\frac{d\phi}{dt},$$

откуда следует уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{s_\varphi v}{\varkappa_0} \frac{d\phi}{\phi}, \tag{8.34}$$

где $\phi = \mu_0 H x$ — поток в компрессионном объеме. Если коэффициент $s_\varphi v/\varkappa_0$ является постоянным, то прямым интегрированием получим закон изменения потока

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\varkappa_0/s_\varphi v}. \tag{8.35}$$

В случае когда поршень движется с постоянной скоростью $v = v_0$, из (8.31), (8.33) и (8.34) следует, что

$$\frac{\phi}{\phi_0} \approx \exp\left\{-\frac{2}{\sqrt{R_M}}\left(\sqrt{\frac{x_0}{x}} - 1\right)\right\}. \tag{8.36}$$

Здесь введено *магнитное число Рейнольдса*

$$R_M = \frac{x_0 v_0}{\varkappa_0}, \tag{8.37}$$

которое можно рассматривать как отношение времени диффузии ($\approx x_0^2/\varkappa_0$) к времени компрессии ($x_0/v_0$). Таким образом, большая величина R_M означает, что диффузионные потери относительно невелики. Например, для медного поршня при $x_0 = 10$ см и $v_0 = 0{,}2$ см/мкс имеем $R_M = 15\ 000$.

8.13. Определим теперь взаимосвязь между понятием диффузии поля и формальными уравнениями цепи, приведенными в начале этой главы. Используя приближения п. 8.12, по аналогии с результатами п. 6.12 получим соотношение для среднего сопротивления $\overline{R}$ (на единицу поверхности)

$$\overline{R} \approx \frac{1}{\sigma_0 s_\varphi},$$

тогда как для полной индуктивности, очевидно, справедливо выражение

$$L \approx \mu_0 l.$$

Подставляя эти соотношения в (8.3), можно найти выражение для коэффициента усиления поля

$$\frac{H}{H_0}=\frac{I}{I_0}\approx\frac{l_0}{l}\exp\left[-\varkappa_0\int_0^t\frac{1}{s_\text{ф} l}\,dt\right].$$

Если скорость поршня постоянна, т. е.

$$v_0=-\frac{dx}{dt}\approx-\frac{dl}{dt},$$

то из (8.31) и (8.33) следует, что коэффициент усиления поля будет

$$\frac{H}{H_0}\approx\frac{l_0}{l}\exp\left[\frac{2}{\sqrt{R_M}}\left(1-\sqrt{\frac{l_0}{l}}\right)\right]. \qquad (8.38)$$

Если не учитывать того факта, что в этом выражении введено отношение l_0/l вместо x_0/x (что обусловлено точностью использованных приближений), полученный результат совпадает с (8.36).

8.14. Из уравнения (8.37) можно определить *максимальный коэффициент усиления поля* H_m/H_0, который может быть достигнут в идеальной компрессионной системе. Максимум достигается при $x\to0$; в этом случае минимальное расстояние l определяется из (8.29), (8.31) и (8.33) как

$$l_\text{мин}\approx\sqrt{\frac{\varkappa_0 l_\text{мин}}{v}},$$

т. е.

$$l_\text{мин}\approx\frac{\varkappa_0}{v_0}. \qquad (8.39)$$

Подставляя это значение в (8.38), получаем максимальный коэффициент усиления поля для больших значений R_M

$$\frac{H_m}{H_0}\approx\frac{R_M}{e^2}+\frac{\sqrt{R_M}}{e^2}, \qquad (8.40)$$

где $e\approx2{,}718$ — основание натуральных логарифмов. Можно провести *точные* расчеты, в которых учитывается эффективное усиление поля и диффузия. Они основываются на преобразованиях Лапласа и приводят к следующему результату [8.2; 9.10]:

$$\frac{H_m}{H_0}=\frac{1}{2}R_M+2\sqrt{\frac{R_M}{\pi}}. \qquad (8.41)$$

Используя аналогичные приближения при решении цилиндрической задачи, Коуэн [1.36] получил ряд энергетических соотношений, таких, как потери на джоулево тепло, эффективность сжатия и т. д. Эти задачи будут обсуждаться в гл. 9 в связи с проблемой достижения предельных магнитных полей (п. 9.13).

Динамика сжатия

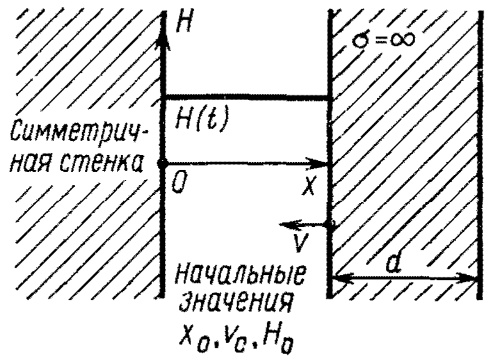
8.15. Обычно системы, использующие принцип компрессии магнитного потока, характеризуются *начальной кинетической энергией* поршня (толщиной d, фиг. 8.6)

$$W_{K_0}=\frac{1}{2}\rho d v_0^2 \tag{8.42}$$

и начальной магнитной энергией в сжимаемом объеме

$$W_{M_0}=\frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 x_0. \tag{8.43}$$

Предполагая, что используются идеальные проводники ($\sigma\to\infty$)



Фиг. 8.6. Плоский поршень конечной толщины.

можно записать законы сохранения потока и энергии в виде

$$\mu_0 H x=\mu_0 H_0 x_0, \tag{8.44}$$

$$\frac{1}{2}\mu_0 H^2 x+\frac{1}{2}\rho d v^2=W_{M_0}+W_{K_0}. \tag{8.45}$$

Дифференцируя первое из них, получаем

$$v=-\frac{x}{H}\frac{dH}{dt}$$

и из (8.45) окончательно имеем

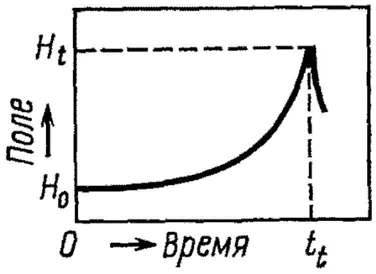
$$\frac{dH}{dt}-\frac{H^2}{H_0 x_0\sqrt{(\rho d)}}(W_{M_0}+W_{K_0}-\mu_0 H H_0 x_0)^{1/2}. \tag{8.46}$$

Это дифференциальное уравнение можно проинтегрировать по частям и получить выражение для H в виде трансцендентной функции (схематически показанной на фиг. 8.7).

8.16. Возрастающее магнитное давление будет тормозить движущийся внутрь поршень до тех пор, пока он не достигнет *точки* *поворота*, в которой в конце концов остановится. В этой точке в случае несжимаемого лайнера вся кинетическая энергия перейдет в магнитную энергию. Из (8.44) и (8.55) можно получить *поле в точке поворота* H_t и *координату* этой точки x_t

$$\frac{H_t}{H_0}=\frac{x_0}{x_t}=1+\frac{W_{K_0}}{W_{M_0}}\,. \tag{8.47}$$

Отсюда видно, например, что максимальное поле H_t можно увеличить, уменьшая начальный захваченный поток $2W_{M_0}/H_0$.

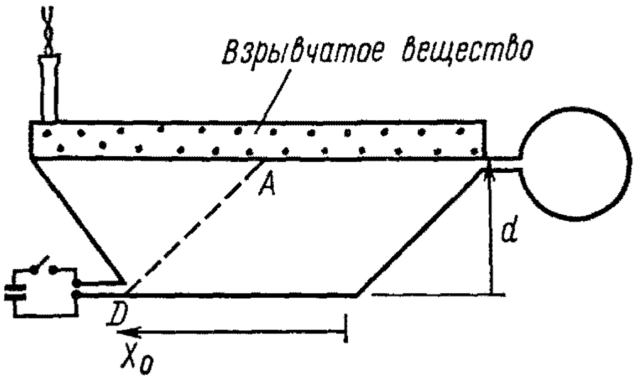


Фиг. 8.7. Форма импульса магнитного поля в МК-генераторе.

Как будет показано в гл. 9, более строгий расчет системы с металлическим поршнем приводит к динамическим ограничениям для максимально достижимых полей, существенно более строгим, чем обусловленные диффузией ограничения, обсуждавшиеся в п. 8.14.

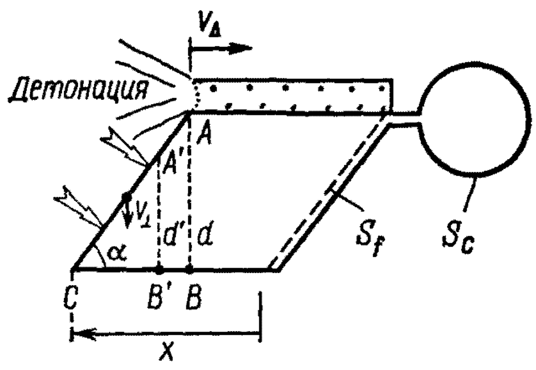
Потери магнитного потока через скользящий контакт

8.17. Большинство систем с компрессией потока имеет по крайней мере один *скользящий контакт*, который может вызвать дополнительные потери потока. Проведем приближенные оценки этого



Фиг. 8.8. Плоский МК-генератор типа «кузнечные меха».

эффекта, используя в качестве примера устройство, схематически изображенное на фиг. 8.8. В этом устройстве продукты взрыва заряда ускоряют металлическую пластину («лайнер», см. п. 8.19), которая действует как проводящий поршень, движущийся со скоростью детонационной волны v_Δ. Как видно из чертежа, лайнер прежде всего закорачивает устройство само на себя (положение AD), а затем выдавливает захваченный магнитный поток в соленоид.

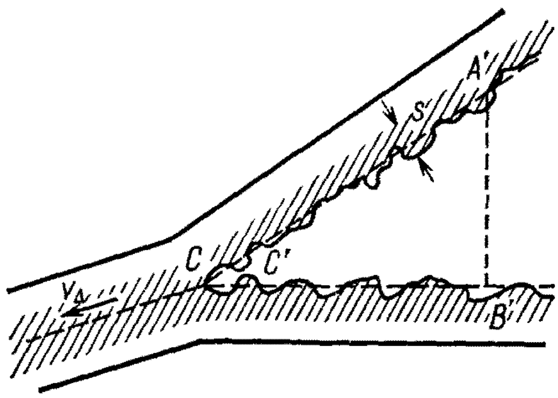


Фиг. 8.9. Система, изображенная на фиг. 8.8, в процессе кумуляции.

В точке C (фиг. 8.9) имеется скользящий контакт, через который происходят потери потока со скоростью

$$\frac{d\phi}{dt} = -2sv_\Delta\mu_0 H, \tag{8.48}$$

где s — глубина слоя потерь, в которую входят толщина скин-слоя и средняя величина неоднородностей поверхности (фиг. 8.10).



Фиг. 8.10. Скользящий контакт при большом увеличении.

Выражение (8.48) отображает тот факт, что поток вблизи проводника захватывается смыкающимися поверхностными неоднородностями и теряется для дальнейшего сжатия.

8.18. Предположим, что в идеализированном устройстве, изображенном на фиг. 8.9:

а) магнитное поле постоянно по всему сечению;

б) потери потока в процессе сжатия определяются поверхностными потерями S_f;

в) в процессе сжатия все потери определяются соотношением (8.48).

В этом случае можно написать следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx}[H(xd+S)] = 2sH, \quad S = S_f + S_c,$$

которое непосредственно интегрируется, и при начальных условиях $x = x_0$, $H = H_0$ получаем коэффициент усиления для поля

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{x_0 d + S}{xd + S}\right)^{1-2s/d}. \tag{8.49}$$

Из этого результата видно, например, что если коэффициент геометрического сжатия равен $x_0 d/S = 100$, а $s = 0{,}2$ см и $d = 4$ см (типичные экспериментальные величины), то коэффициент усиления поля на 40% меньше, чем в случае отсутствия потерь ($s \equiv 0$).

§ 3. МАГНИТОКУМУЛЯТИВНЫЕ ВЗРЫВНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ [1]

Ускорение пластинки продуктами взрыва

8.19. В генераторе, работающем по принципу сжатия потока, процесс преобразования энергии проходит *две стадии*: первоначальная энергия переходит в кинетическую энергию движущегося поршня, а затем кинетическая энергия переходит в энергию магнитного поля. Процесс преобразования кинетической энергии в магнитную был описан в предыдущих разделах, поэтому сейчас основное внимание будет обращено на первую стадию процесса и будут рассмотрены наиболее существенные результаты для случая, когда в качестве первичного источника энергии используются мощные химические взрывчатые вещества.

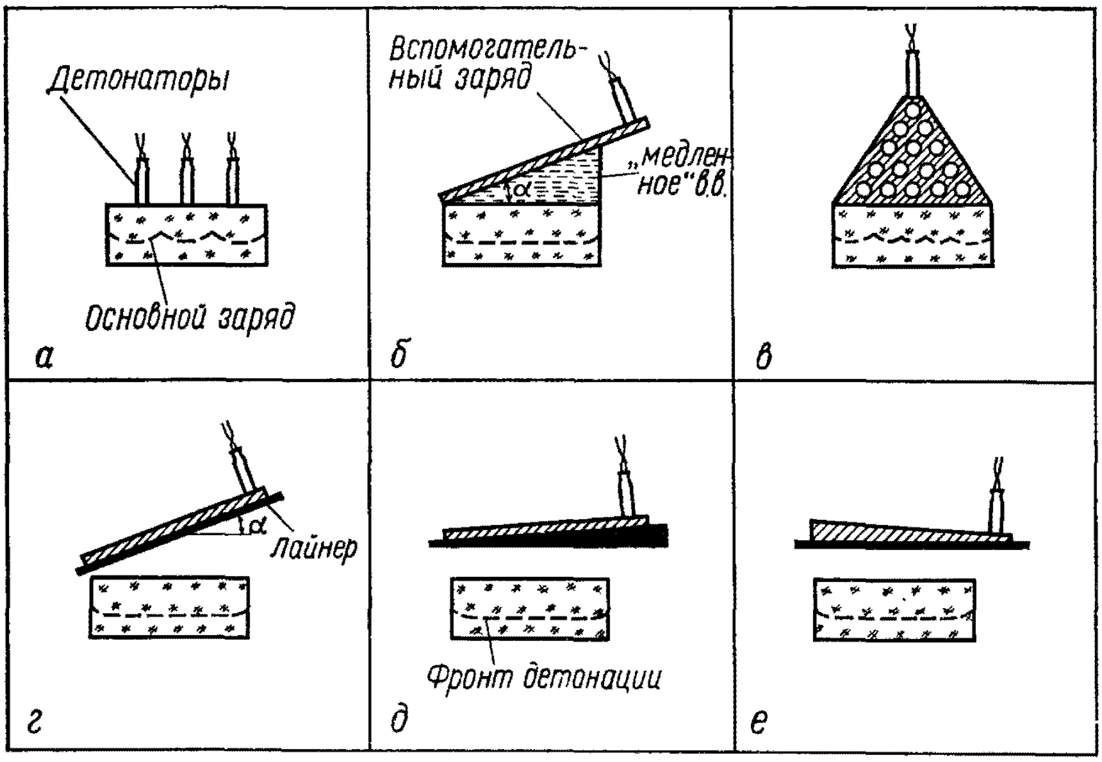
Химические взрывчатые вещества, действительно, являются наиболее привлекательными источниками энергии для компрессионных систем как в связи с высокими плотностями энергии, так и в отношении выделяемой мощности (табл. 10.III). Кроме того, выделяемую при взрыве химическую энергию можно просто и с высокой эффективностью (до 20—40%) преобразовывать в кинетическую энергию металлической пластинки, которая обычно называется *«лайнером»* и является основным элементом всех компрессионных систем.

---

[1] В отечественной литературе для систем, использующих принцип сжатия магнитного потока за счет энергии взрыва, применяется термин «магнитокумулятивные» (МК-генераторы) как наиболее точно отражающий сущность явления — кумуляцию магнитного потока.— *Прим. перев.*

8.20. Эффективность использования мощных химических взрывчатых веществ определяется правильным инициированием и формированием *детонационной волны*. Действительно, распределение скорости (т. е. формы и неоднородности) ускоренного лайнера непосредственно связано с формой взаимодействующей с ним детонационной волны.

Так как все взрывчатые вещества характеризуются постоянной *скоростью детонации* v_Δ, которая, однако, различна для разных



Фиг. 8.11. Примеры возможных вариантов взрывных генераторов с линейной детонационной волной.

Если представленные системы имеют большую глубину (в плоскости, перпендикулярной чертежу), то получим генераторы с плоской детонационной волной (в этом случае каждый отдельный детонатор должен быть заменен линейным детонатором).

веществ, для процессов распространения детонационных волн могут быть использованы законы *геометрической оптики*. Применение двух различных сортов взрывчатки в одной системе позволяет создавать собирающие или рассеивающие линзы, а также преобразовывать данную детонационную волну в другую, имеющую желаемый профиль. Простой пример использования этого принципа показан на фиг. 8.11, *б*. Если v_{Δ_1} и v_{Δ_2} — скорости детонационной волны в вспомогательном и «медленном» взрывчатых веществах, то очевидно, что линейная (или плоская) детонационная волна будет возбуждаться в основном заряде, если

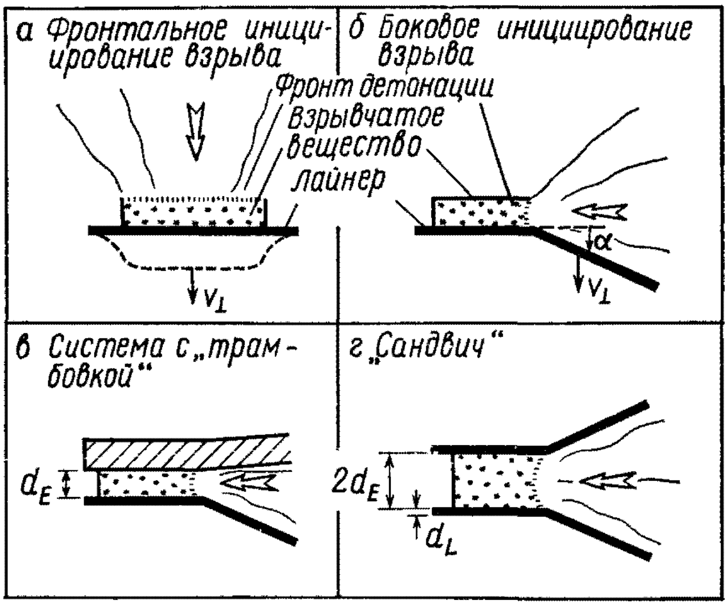
$$\frac{v_{\Delta 2}}{v_{\Delta 1}} = \sin\alpha. \qquad (8.50)$$

Вариант, отличающийся по исполнению, но в принципе аналогичный рассмотренному случаю, показан на фиг. 8.11, *г*. Он основан на возможности возбуждения детонационной волны в мощных взрывчатых веществах ударом металлического листа, движущегося со скоростью свыше 0,05 см/мкс. Если $v_\perp$ — нормальная постоянная скорость лайнера (фиг. 8.12, *б*), условия для образования плоской ударной волны будут иметь вид

$$\frac{v_\perp}{v_{\Delta 1}} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{8.51}$$

Существует много других способов (см. фиг. 8.11) создания линейной (или плоской) детонационной волны. Наиболее широко используется метод создания требуемой формы детонационной волны подрывом заряда одновременно во многих точках (фиг. 8.11, *а*). Другие методы (фиг. 8.11, *д*, *е*) связаны с зависимостью скорости лайнера от локального отношения массы взрывчатки к массе лайнера (см., например, фиг. 8.13). И наконец, линейная детонационная волна может быть получена введением в взрывчатку инертных материалов или пустот (фиг. 8.11, *в*).

8.21. Первая стадия процесса ускорения характеризуется прохождением и отражением ударных волн, которые возникают в лай-



Фиг. 8.12. Различные способы ускорения лайнера

нере при его взаимодействии с детонационной волной. Затем лайнер ускоряется за счет давления газообразных продуктов взрыва. Все эти явления более детально будут обсуждаться в гл. 10. Наиболее существенным фактом, который необходимо здесь отметить, является то, что лайнер очень быстро (обычно на расстоянии 1—2 см от начального положения, см. фиг. 10.17) достигает скорости, близкой к ее конечной величине.

В зависимости от относительного положения детонационного фронта и лайнера будем различать случаи *фронтального* и *бокового ускорения* (фиг. 8.12). Безусловно, имеется также множество промежуточных случаев для существенно различных геометрических форм. С каждой конкретной конструкцией связаны свои технические проблемы, такие, как, например, формирование детонационной волны, рассматривавшееся в предыдущем пункте.

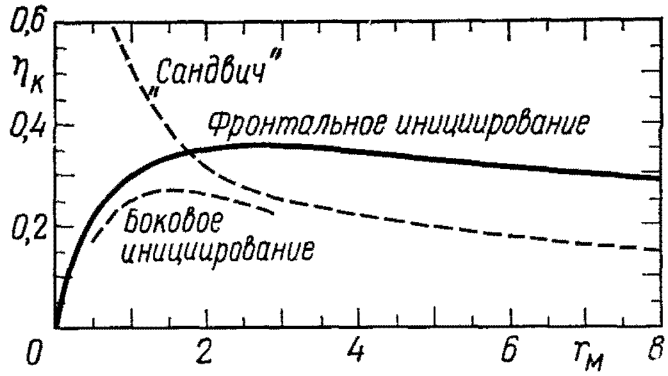
8.22. Рассмотрим *энергетическую эффективность*

$$\eta_K = \frac{W_K}{d_E \rho_E \varepsilon_E}, \tag{8.52}$$

с которой химическая энергия $d_E \rho_E \varepsilon_E$ (на единицу поверхности) преобразуется в кинетическую энергию лайнера

$$W_K = \frac{1}{2} d_L \rho_L v_\perp^2; \tag{8.53}$$

здесь ε_E — плотность химической энергии, реализуемой в процессе взрыва [см. табл. 10.III и соотношение (10.54)]; $v_\perp$ — (ко-



Фиг. 8.13. Энергетическая эффективность различных систем ускорений лайнера.

Теоретическая кривая для фронтального подрыва построена по выражению (10.62); экспериментальные кривые с ошибкой $\pm$ 10% были получены для лайнеров из меди, алюминия и нержавеющей стали. Использовался заряд взрывчатки состава B ($\varepsilon_E \approx 4{,}8$ кДж·г$^{-1}$).

нечная) скорость лайнера (фиг. 8.12), а d, ρ — соответственно толщина и массовая плотность взрывчатки (индекс E) или лайнера (индекс L).

На фиг. 8.13 приведены экспериментальные значения эффективностей для двух систем с боковым подрывом как функции *параметра относительной массы*

$$r_M = \frac{\rho_E d_E}{\rho_L d_L}. \tag{8.54}$$

Для случая фронтального подрыва приводится только теоретическая кривая [см. (10.62)], так как экспериментальные значения лежат ниже этой кривой, и величина расхождения определяется

ТАБЛИЦА 8.1

Устройства с компрессией магнитного потока

L_{C_0}, мкГ	L_L, нГ	I_0, кА	I_F, МА	H_m, МЭ	λ	W_M, МДж	Нагрузка (размеры в см)	Конструкция	Литература
«Кузнечные меха»									
130	1,2	700	20	2,2	0,26	0,24	Соленоид: $a=0,5$, $h=10$	См. фиг. 8.15	[1.41]
0,44	12	550	12,5	0,7	0,64	0,94	Соленоид: $a=2,5$, $h=20$	См. фиг. 8.17	[8.15]
1,16	15	380	16	0,6	0,54	2	Соленоид: $a=3,2$, $h=30$	Двухкаскадная система	[8.15]
Коаксиальные									
—	1	15 000	250	2	—	30	Тор: $a\approx 0,5$, $R=24$	См. фиг. 8.19	[8.7]
—	10	—	50	~1	—	12	Коаксиальная	—	[8.5]
Спиральные									
46	35	50	11,5	0,1	0,15	2,4	Фиг. 8.19	Проволочный соленоид (типа 18)	[8.7]
725	60	6	7	1,4	0,08	1,5	Коаксиальная	Точечная катушка (типа 10)	[8.7]
5	70	100	6,5	—	~0,6	1,5	Соленоид	Двухзаходная спираль (модель 169)	[8.14]

относительными начальными размерами блока взрывчатки. Уменьшение эффективности обусловлено, разумеется, боковым разлетом газообразных продуктов взрыва. Необходимо также отметить, что практически плотность кинетической энергии, получаемая при фронтальном подрыве, может достигать 30 кДж$\cdot$см$^{-2}$, в то время как при боковом подрыве типичной хорошей величиной считается 8 кДж$\cdot$см$^{-2}$.

Генераторы типа «кузнечные меха»

8.23. Генераторы типа «кузнечные меха» представляют собой магнитокумулятивную систему, схематически показанную на фиг. 8.8, 8.9 и кратко упомянутую в п. 8.17. В этих генераторах магнитный поток выдавливается в конечную нагрузку плоским проводящим элементом. С помощью устройства этого типа в одновитковом соленоиде были получены магнитные поля до 2,3 МЭ и энергия (магнитная) до 2 МДж (табл. 8.I).

8.24. Генераторы этого типа конструктивно просты и могут быть приспособлены к различным экспериментальным условиям [1.28, 8.11, 8.12, 1.41, 8.15]. Существуют два наиболее важных

Фиг. 8.14. Различные модификации генератора типа «кузнечные меха».

параметра: величина сжимаемой индуктивности L_{C_0}, которая должна быть сравнимой с индуктивностью нагрузки [см. соотношения (8.6) и (8.10)], и величина внутренней энергии (взрывчатки), необходимая для усиления начальной магнитной энергии W_{M_0}.

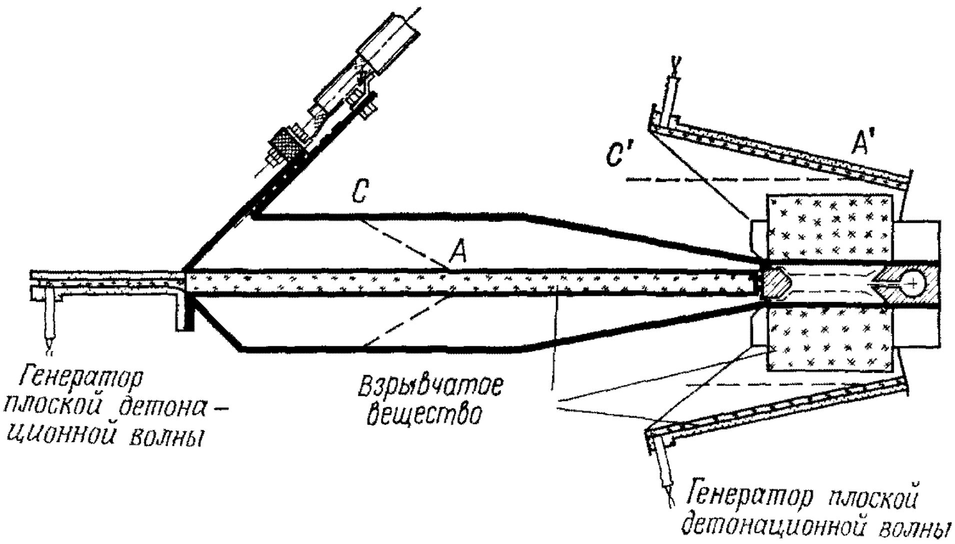
Подбирая форму компрессионного объема (т. е. закон распределения L_{C_0}), можно управлять временем сжатия, формой импульса поля и его конечной величиной. И наконец, можно использовать трансформирующую систему, описанную в п. 8.4.

Для достижения максимальной *эффективности системы*

$$\eta_C = \frac{\text{конечная магнитная энергия} - W_{M_0}}{\text{полная энергия взрывчатки}} \qquad (8.55),$$

необходимо, чтобы кинетическая энергия любого поверхностного элемента поршня была равна работе, которую он совершает за время сжатия против магнитного давления, плюс энергия, требуемая для осуществления хорошего скользящего контакта. В генераторах типа «кузнечные меха» необходимая энергия может быть получена за счет увеличения толщины и/или ширины блока взрывчатки, как показано, например, на фиг. 8.14, *в* и 8.17; кроме того, вокруг одновиткового соленоида можно установить два или несколько генераторов (параллельное включение), фиг. 8.14, *г*.

8.25. На фиг. 8.15 приведен пример *двухкаскадного генератора* системы «кузнечные меха». Первый каскад представляет собой копию системы, изображенной на фиг. 8.8. Взрывчатка находится

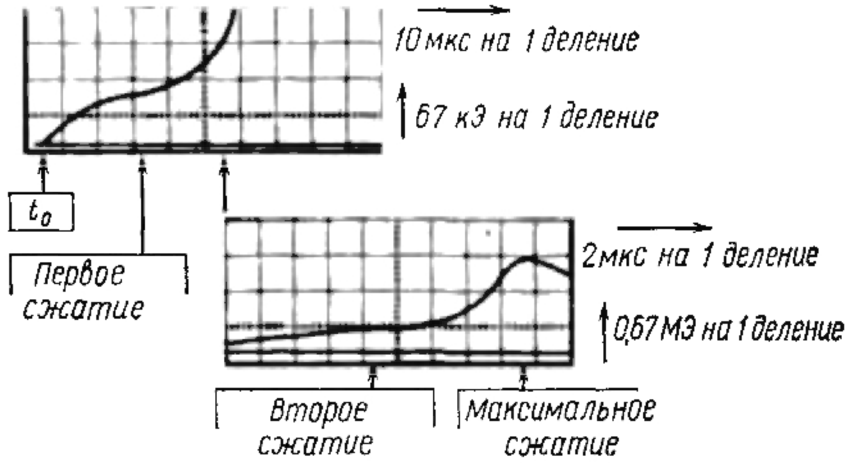


Фиг. 8.15. Двухкаскадная плоская магнитокумулятивная система (полная длина 80 см, ширина постоянна и равна 15 см).

в центральной части и действует с высокой эффективностью (фиг. 8.13). Такая система становится неэффективной, когда давление поля становится сравнимым с давлением газообразных продуктов взрыва, т. е. когда ускорение лайнера мало и кинетическая энергия лайнера недостаточна для эффективного сжатия потока и обеспечения надежного скользящего контакта. Эту трудность можно преодолеть путем использования второго каскада, в котором лайнер ускоряется, пока поле относительно невелико, и окончательное сжатие потока осуществляется за счет инерциальных сил двух сходящихся лайнеров. Процесс нарастания магнитного поля во времени виден из осциллограмм, снятых с датчика, находящегося в соленоиде (фиг. 8.16). Инициирование взрывчатки производится так, чтобы компрессия начиналась в момент, соответствующий максимуму разрядного тока в цепи первичной конденсаторной батареи (п. 8.4).

8.26. Как отмечалось в п. 8.6, важным этапом в развитии магнитокумулятивных устройств является использование в них *систем включения* (фиг. 8.3), которые позволяют вводить магнитную энергию из компрессионного объема за время менее 10 мкс.

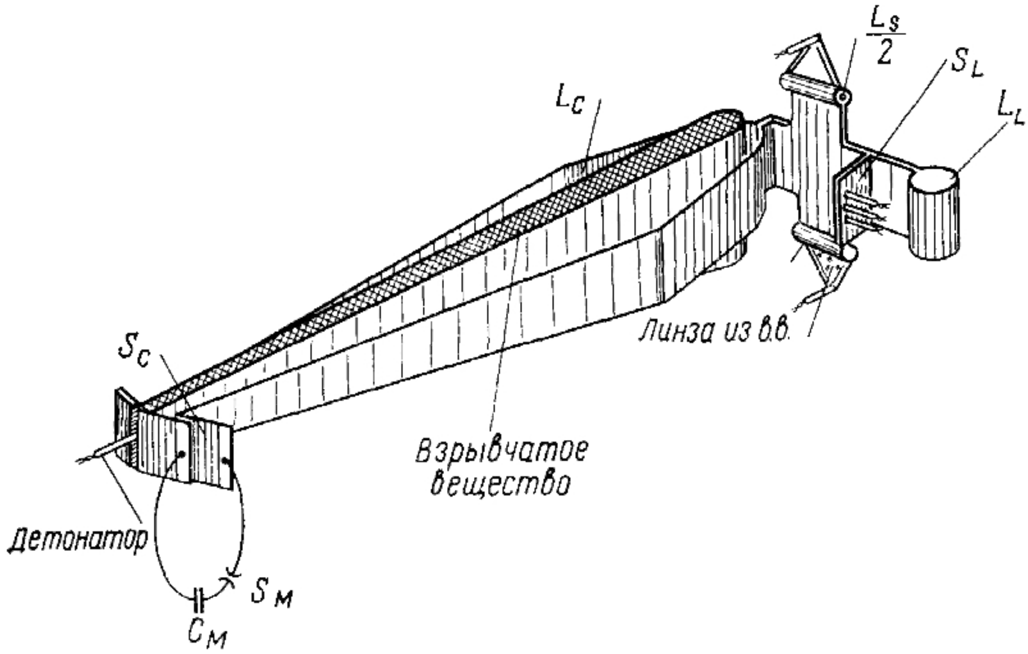
С точки зрения эксперимента наиболее трудным для реализации элементом такой системы является размыкающий ключ S_S.



Фиг. 8.16. Временны́е изменения магнитного поля в соленоиде генератора, показанного на фиг. 8.15.

Проведено на двух осциллографах. Конечное поле 1,8 МЭ получено в объеме 13 см³; t_0 — момент включения конденсаторной батареи.

Одним из интересных вариантов такого ключа является использование эффекта очень быстро возрастающего сопротивления тонких проводников при их электрическом взрыве, что обсуждалось



Фиг. 8.17. Большой генератор типа «кузнечные меха» (100 см длиной) с системой переключателей (фиг. 8.3), использовавшийся в плазменных экспериментах [1.153].

в п. 6.29. Так, например, в работе [8.14] для этой цели успешно использовалось несколько взрывающихся проволочек. Был получен максимальный ток в 5 МА за время 3 мкс с максимальной скоростью нарастания $4 \cdot 10^{12}$ А $\cdot$с$^{-1}$.

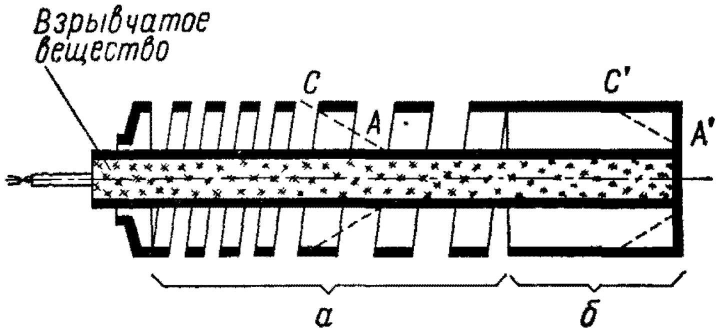
Однако для очень больших генераторов энергии с временем кумуляции свыше 100 мкс и током на выходе более 10 МА требуемое поперечное сечение взрывающегося проводника S становится неразумно большим. Так, например, для устройства, показанного на фиг. 8.17, параметры которого приведены в табл. 8.I, интеграл тока (6.59) равен $\int\limits_0^{t_{\text{макс}}} I^2dt = 1{,}5\cdot 10^9\ \text{А}^2\cdot\text{с}$, т. е. если используется медный проводник, необходимо, чтобы $S = 0{,}9\ \text{см}^2$ или, в случае использования фольги толщиной 0,02 см, ее ширина должна составлять 45 см.

В таких случаях представляет интерес возможность *взрывного ключа*, схематически показанного на фиг. 8.17. Его принцип работы чрезвычайно прост. Подходящих размеров проводник (который способен противостоять большому магнитному давлению) частично разрушается и разрывается силами взрыва и/или магнитного давления; проводник утоньшается и в конце концов достигает условий (6.59), обеспечивающих его электрический взрыв. Общее время разрыва для ключа, изображенного на фиг. 8.17, относительно велико, около 5—10 мкс. Следовательно, использование такого ключа в варианте с чистым сопротивлением (п.«а» п. 8.9) неэффективно. Согласно требованиям соотношений (8.26) и (8.27), ключ должен быть сделан так, чтобы его полная паразитная индуктивность L_S имела примерно ту же величину, что и индуктивность нагрузки L_L.

Принцип работы замыкающего ключа основывается на разрушении слоя изоляционного материала под действием взрыва. Конструирование такого ключа практически несложно, и можно добиться, чтобы его время срабатывания было короче 0,2 мкс.

Коаксиальный генератор

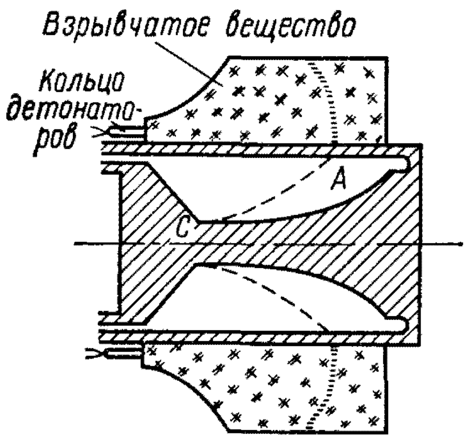
8.27. Коаксиальный генератор, схематически показанный на фиг. 8.18, *б*, может быть получен при вращении устройства, изображенного на фиг. 8.8, вокруг горизонтальной оси. Отсюда следует, что большинство проблем, обсуждавшихся ранее для плоских систем, сохраняет силу и в случае цилиндрической геометрии и может быть решено аналогичными методами. Компрессия, например, может быть достигнута при подрыве как внутреннего проводника, так и/или внешнего. Первый вариант интересен с практической точки зрения вследствие своей энергетической эффективности, простоты изготовления и возможности использования в комбинации со спиральными системами (фиг. 8.18). Он с большим успехом применялся в ряде лабораторий [8.5, 8.7] (см. табл. 8.I). Длина систем этого типа может достигать нескольких метров без существенных диффузионных потерь [1]).



Фиг. 8.18. Спиральный и коаксиальный генераторы, соединенные последовательно.

а — спиральный генератор; *б* — коаксиальный генератор.

В зависимости от геометрии можно использовать осевое или радиальное сжатие или, как это было сделано в работе [8.7], комбинацию обоих видов, что позволило создать в тороидальной нагрузке ток более 250 МА (фиг. 8.19).



Фиг. 8.19. Схлопывающаяся коаксиальная система, использованная в работе [8.7].

Спиральные генераторы

8.28. Спиральные кумулятивные системы (фиг. 8.18, *а*) являются модификацией коаксиального генератора, характеризующейся спиральной намоткой внешнего проводника, что обеспечивает относительно большую собственную индуктивность системы. Магнитный поток сжимается расширяющимся внутренним проводником, который выполняет роль обратного провода компрессионной системы.

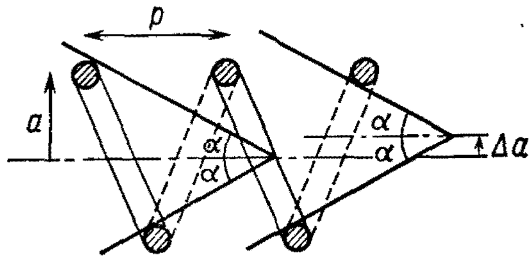
---

[1]) По аналогии с электротехнической терминологией в работе [8.7] движущийся лайнер в генераторе энергии называют «*якорем*», а неподвижную токонесущую часть, или катушку, — «*статором*».

Спиральный генератор наиболее часто используется в качестве первого каскада («бустера потока») в многокаскадных кумулятивных системах. Это связано с тем, что вследствие большой собственной индуктивности эти генераторы позволяют, как видно, например, из соотношения (8.12), захватить относительно большой начальный поток.

Различные модели таких генераторов детально описаны [8.7, 8.9, 8.14] и использовались в ряде экспериментов [1.51, 8.5].

8.29. В спиральных генераторах осуществление надежного скользящего контакта является более сложной задачей, чем



Фиг. 8.20. Витки спирального генератора.

в случае коаксиальных генераторов или генераторов типа «кузнечные меха». Это объясняется тем, что эффективный угол контакта между расширяющимся якорем и спиралью очень мал, а распределение тока в области линии контакта или в точке имеет сравнительно сложный характер. Действительно, распределение тока в расширяющейся сердцевине якоря непрерывно изменяется с движением точки контакта вдоль спирали со скоростью

$$v \approx 2\pi \left(\frac{a}{p}\right) v_\Delta .$$

[Здесь v_Δ — скорость детонационной волны, и предполагается, что шаг спирали меньше ее радиуса ($p < a$).] Кроме того, аксиальные разрывы в расширяющейся сердцевине (которые в коаксиальных системах играют малую роль) препятствуют протеканию азимутальных токов в этой части проводника.

Потери потока в точках контакта резко возрастают, если расширяющаяся часть не представляет собой правильного конуса или не коаксиальна со спиралью. Действительно, как видно из фиг. 8.20, эксцентриситет Δa ограничен величиной

$$\frac{\Delta a}{a} < \frac{p}{2a} \operatorname{tg} \alpha ,$$

так как в противном случае точка контакта перепрыгнет на полвитка вперед и поток, захваченный между двумя этими точками, будет потерян.

8.30. Чтобы получить выражение для *оптимальной эффективности системы* (8.55), предположим, что увеличение магнитной энергии равно кинетической энергии (на единицу длины) W_{K_0}, т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[(L_C+L_L)I^2\right]=W_{K_0}, \tag{8.56}$$

где $L_C(z)$ — сжимаемая индуктивность, а L_L — индуктивность нагрузки (величина W_{K_0} должна быть несколько меньше, примерно 80%, по сравнению с реальной кинетической энергией лайнера, чтобы обеспечить хороший контакт сталкивающихся проводников). Если для простоты предположить также, что начальный захваченный поток

$$\phi_0=(L_{C_0}+L_L)I$$

остается постоянным за время сжатия, то соотношение (8.56) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{(L_C+L_L)^2}\frac{dL_C}{dz}=\frac{2W_{K_0}}{\phi_0^2}.$$

После интегрирования получаем закон изменения индуктивности, необходимый для выполнения закона сохранения энергии (8.56):

$$L_C(z)+L_L=\frac{L_0}{W_{K_0}z/W_{M_0}+1}, \tag{8.57}$$

где W_{M_0} — начальная магнитная энергия, а $L_0=L_{C_0}+L_L$ — начальная полная индуктивность.

8.31. Чтобы преобразовать (8.57) в условие для *плотности витков* n или *шага* $p=1/n$, напишем приближенное соотношение для индуктивности спирали

$$L_C\approx\mu_0\int\limits_z^l Sn^2\,dz,\quad S=\pi(a^2-r_0^2). \tag{8.58}$$

Это приближение, полученное способом, аналогичным использованному при выводе соотношения (П1.13), удовлетворительно описывает индуктивность спирали, если $dn/dz<1/a^2$. После дифференцирования соотношений (8.57) и (8.58), исключая L_C, получаем для шага линейную зависимость от z

$$p\approx\sqrt{\mu_0\frac{S}{L_0}\frac{W_{M_0}}{W_{K_0}}}\left(\frac{W_{K_0}z}{W_{M_0}}+1\right). \tag{8.59}$$

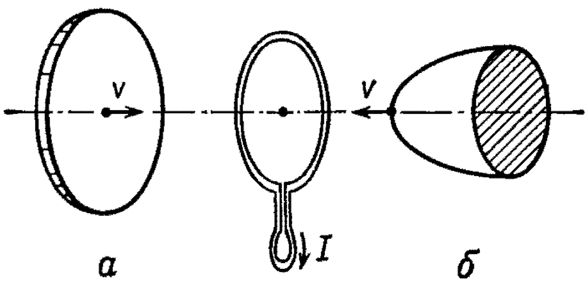
Увеличение шага в направлении к концу кумулятивной системы создает возможность увеличения ширины витков и сохранения в разумных пределах плотности тока. В действительности, как показывают результаты диффузионной теории, рассмотренной в гл. 4, и экспериментальные данные [9.20], локальные поля не должны превосходить величину 1 МЭ, так как в противном случае резко возрастают потери потока.

8.32. Поскольку изготовление спирали с переменным шагом связано с технологическими трудностями или по крайней мере очень дорого, на практике чаще используется конструкция, состоящая из ряда секций, в каждой из которой шаг постоянен и возрастает от секции к секции согласно (8.59).

Спирали обычно изготавливаются на станке из металлического цилиндра [8.7]. Можно изготовить спираль, наматывая провод подходящего сечения на стержень; увеличение шага и сечения проводника вдоль спирали достигается добавлением дополнительных витков, подключаемых параллельно основным [8.7, 8.14].

Некоторые дополнительные замечания о системах с кумуляцией потока

8.33. Не существует очевидных ограничений вариантов возможных магнитокумулятивных систем другой геометрии, поскольку практически любая замкнутая проводящая система может



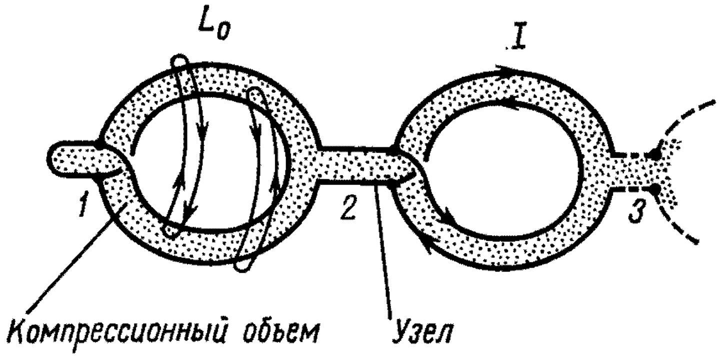
Фиг. 8.21. Компрессия потока поршнем, не связанным с электрической цепью.

а — пластина, сближающаяся с петлей; *б* — снаряд, простреливаемый через петлю.

быть деформирована таким образом, чтобы уменьшилась ее индуктивность [8.3]. Кроме того, существует широкий класс систем, в которых поршень не является частью основной цепи, как, например, система, показанная на фиг. 8.21. Разделение магнитокумулятивной системы на две несвязанные компоненты создает гибкость и предоставляет широкие возможности в выборе формы поршня и источника энергии. Например, такие устройства будут наиболее удобны при использовании в качестве источника энергии ядерного взрывчатого вещества.

8.34. Максимальное время процесса кумуляции потока в основном определяется допустимыми диффузионными потерями. Если предположить в качестве критерия, что глубина скин-слоя для потока $s_\text{ф}$ (см. табл. 4.I и 4.III) остается меньше, чем толщина проводника, то время 1 мс будет, по-видимому, разумным верхним пределом

В пределах этой временно́й шкалы, как показано в гл. 5, решение большинства *механических задач*, касающихся МК-генераторов, может быть просто связано с *инерционными эффектами*. Если масса самого проводника недостаточна для сохранения смещений



Фиг. 8.22. Магнитокумулятивная система FREDA [8.4].

в разумных пределах, то возможно использование дополнительных масс небольшой стоимости (вода, бетон, свинец) для увеличения общей массы.

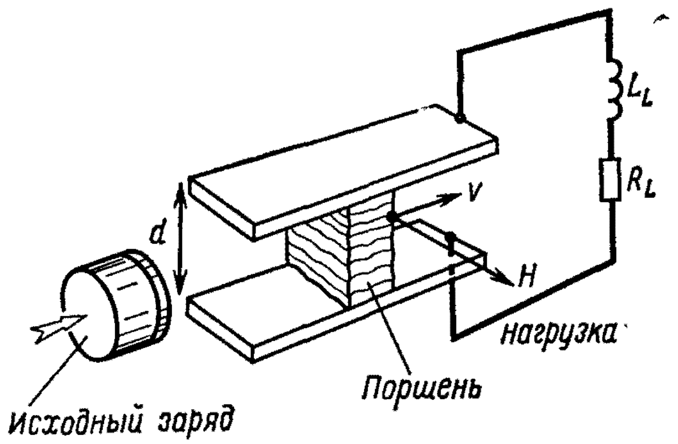
В качестве примера необычной и интересной по принципу действия магнитокумулятивной системы рассмотрим генератор, показанный на фиг. 8.22. Каждая из компрессионных единиц этого генератора работает как «усилитель потока», так как благодаря скручиванию и изгибанию линий поля каждая из них дважды проходит через компрессионный объем. Вследствие симметрии ток через каждую секцию делится на две равные части после прохождения через каждый последующий узел. За время компрессии в первом каскаде ток возрастает в 4 раза (при отсутствии потерь потока) в узле 1, в 2 раза в узле 2. В результате ток возрастает в 2 раза после каждого компрессионного каскада.

8.35. В заключение для полноты изложения заметим, что преобразование химической энергии взрыва в электромагнитную энергию возможно также и в импульсном *МГД-генераторе*. В результате взрыва заряда взрывчатки, обычно покрытого металлической пудрой, создается облако ионизованного газа, который движется по каналу генератора со скоростью v. При прохождении этого газа («проникающий поршень») через внешнее магнитное поле на электродах возникает разность потенциалов ($\mu_0 H d v$), и в результате во внешней цепи протекает ток I (фиг. 8.23) (d — расстояние между электродами).

Уравнение цепи этой системы имеет вид

$$\mu_0 H\, dv = RI + \frac{d(LI)}{dt}, \tag{8.60}$$

где R и L — полное сопротивление цепи и ее индуктивность. Согласно использованной терминологии, можно сказать, что источник потока ($\mu_0 H dv$) входит в цепь. Роль дополнительного вклада



Фиг. 8.23. Взрывной импульсный МГД-генератор.

от сжатия потока (dL/dt) зависит в основном от того, больше или меньше единицы *магнитное число Рейнольдса*:

$$R_M = \frac{dv_0}{\varkappa_0}$$

[см. также соотношение (8.37)].

Экспериментальные результаты показывают, что взрывные импульсные МГД-генераторы работают с к. п. д. всей системы порядка 1% (при $R_M \approx 1$), но при получении больших импульсов мощности ($\geqslant 10^8$ Вт) они еще не могут конкурировать с чисто кумулятивными системами (где $R_M \gg 1$) [1.45, 1.46].

Девятая глава Цилиндрические генераторы сверхсильных магнитных полей

§ 1. ДИНАМИКА СХЛОПЫВАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

9.1. Генерация магнитных полей мультимегаэрстедного диапазона методом компрессии магнитного потока возможна только в том случае, если используется «поршень» с очень большой плотностью кинетической энергии. Количественные оценки этих величин будут приведены несколько позже (см. п. 9.18). Тем не менее уже из экспериментов, описанных в предыдущей главе, ясно, что плотность энергии должна быть больше, чем в простых системах лайнер — взрывчатка. Эту трудность можно преодолеть путем применения цилиндрического сходящегося поршня, когда энергия концентрируется вблизи оси сжатия, где и генерируется сверхсильное магнитное поле.

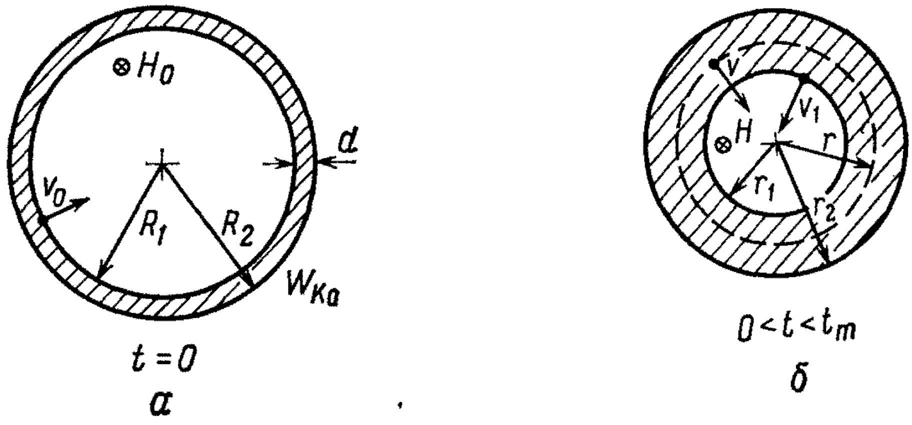
Отметим две наиболее важные компрессионные системы с различной геометрией: *коаксиальную* (в которой сжимается азимутальное поле, см. фиг. 8.19) и *цилиндрическую* (в которой сжимается аксиальное поле, фиг. 9.1). В этой главе будет обсуждаться только цилиндрическая система, так как очевидно, что она позволяет генерировать в необходимых для экспериментов объемах поля свыше 5 МЭ. Во всяком случае, как уже отмечалось в п. 8.27, большинство проблем, которые будут обсуждаться в этой главе, могут быть непосредственно перенесены и на коаксиальную систему.

9.2. Анализ процесса кумуляции в системе с цилиндрической геометрией достаточно сложен, требует привлечения фундаментальных теоретических методов и проведения численных расчетов. К счастью, в большинстве случаев, представляющих практический интерес, возможно отделить фазу ускорения сжимающейся цилиндрической оболочки от фазы сжатия потока. Это упрощение в первую очередь справедливо для взрывомагнитных систем, для которых, как будет показано в п. 9.35, ускорение лайнера в процессе взрыва по существу заканчивается на расстоянии нескольких сантиметров от начального радиуса, когда магнитное давление еще пренебрежимо мало.

Магнитокумулятивные системы мы будем обсуждать с разных точек зрения, последовательно учитывая все важные физические эффекты — постоянную проводимость, проводимость, зависящую от температуры, сжимаемость металлической оболочки, нестабильности сжимаемой оболочки и т. д.

Идеальная компрессия

9.3. Рассмотрим в первую очередь простую задачу (фиг. 9.1), когда идеальная (т. е. несжимаемая, очень длинная, с бесконечной проводимостью) цилиндрическая оболочка сжимает первоначально



Фиг. 9.1. Схлопывание идеальной оболочки.
а — начальное положение; *б* — промежуточное положение.

захваченный магнитный поток. Если магнитный поток *сохраняется*, то магнитное поле будет изменяться по следующему закону:

$$\frac{H}{H_0}=\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^2, \tag{9.1}$$

так что магнитное давление и, следовательно, плотность энергии будут возрастать как

$$\frac{H^2}{H_0^2}=\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^4. \tag{9.2}$$

Увеличение поля будет продолжаться до тех пор, пока начальная кинетическая энергия схлопывающегося проводника (на единицу длины) W_{K_0} не перейдет полностью в магнитную энергию

$$W_{K_0}+W_{M_0}=\frac{1}{2}\mu_0 H_t^2\pi r_t^2,$$

где

$$W_{M_0}=\frac{1}{2}\mu_0 H_0^2\pi R_1^2 \tag{9.3}$$

есть начальная магнитная энергия. Для *поля* H_t и *радиуса* r_t *в точке поворота* из уравнения (9.1), как и в плоском случае (см. п. 8.16), следует

$$\frac{H_t}{H_0} = \left(\frac{R_1}{r_t}\right)^2 = \frac{W_{K_0}}{W_{M_0}} + 1. \tag{9.4}$$

Динамика схлопывания

9.4. Начнем анализ работы МК-генераторов цилиндрической геометрии с рассмотрения процесса схлопывания *цилиндрической оболочки* с *начальной скоростью* v_0 [1]). Ускорение лайнера до этой скорости будет рассмотрено несколько позже в связи с экспериментальной проблемой получения сходящейся цилиндрической детонационной волны (п. 9.34).

Для анализа динамики схлопывания предположим, что оболочка может быть представлена как несжимаемая, невязкая жидкость, заключенная между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями. Из *уравнения непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{9.5}$$

для осесимметричной несжимаемой жидкости следует условие (см. табл. П2.1)

$$\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0, \tag{9.6}$$

из которого после интегрирования имеем

$$rv = A(t);$$

здесь r — радиус, v — радиальная скорость, ρ — массовая плотность и $A(t)$ — постоянная интегрирования, которая определяется любым удобным способом из двух граничных условий. Несжимаемость приводит к условию сохранения объема, т. е. (фиг. 9.1)

$$r_2^2 - r_1^2 = R_2^2 - R_1^2 = R_0^2, \tag{9.7}$$

где R_0 — радиус (внешний) полностью схлопнувшейся несжимаемой оболочки ($r_1 \to 0$).

9.5. *Кинетическая энергия* оболочки (на единицу длины), сжатой от r_1 до r, равна

$$W_K(r,\ t) = \pi\rho \int_{r_1}^{r} v^2 r\, dr = \pi\rho r_1^2 v_1^2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right). \tag{9.8}$$

---

[1]) Эта задача аналогична классической задаче о схлопывании пузырька газа в жидкости, которая обсуждалась Релеем в 1917 г. для случая несжимаемой жидкости; позже эта задача была рассмотрена с учетом эффектов сжимаемости и вязкости (см. [10.150]).

Из закона сохранения количества движения [см. (9.34) и (П4.15)]

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{9.9}$$

после интегрирования легко получить закон изменения давления с радиусом оболочки r

$$p(r,\ t)-p_1(t)=\rho\left[\frac{1}{2}A^2\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r^2}\right)-\frac{dA}{dt}\ln\frac{r}{r_1}\right]. \tag{9.10}$$

Свободно сходящаяся оболочка

9.6. Для понимания процесса схлопывания цилиндра под действием взрыва рассмотрим вначале *свободно сходящуюся оболочку*. Этот наиболее простой случай определяется граничными условиями (при $r = r_1,\ r_2$)

$$p_1 = p_2 \equiv 0 \tag{9.11}$$

и начальными условиями (при $t = 0,\ r_1 = R_1$)

$$v_1 = v_0. \tag{9.12}$$

Скорость v_0 определяют после подстановки в уравнение (9.8) начальных радиусов R_1, R_2 и *начальной кинетической энергии*

$$W_{K_0} = \pi\rho v_0^2 R_1^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \tag{9.13}$$

9.7. Соотношение между скоростью схлопывания v_1 и внутренним радиусом r_1 вытекает из закона сохранения (кинетической) энергии:

$$W_K = W_{K_0}, \tag{9.15}$$

и окончательно имеем

$$(r_1v_1)^2\ln\left(1+\frac{R_0^2}{r_1^2}\right)=(R_1v_0)^2\ln\left(1+\frac{R_0^2}{R_1^2}\right). \tag{9.16}$$

Для случая, когда лайнер в начальном состоянии очень тонок, т. е.

$$d=R_2-R_1\ll R_1 \quad \text{или} \quad R_0^2\approx 2dR_1, \tag{9.17}$$

получается простое соотношение

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\approx\frac{1}{(r_1/R_0)^2\ln\left[1+(R_0/r_1)^2\right]}. \tag{9.18}$$

Из (9.18) следует, что скорость внутренней границы лайнера постепенно увеличивается и при $r_1 \to 0$ расходится как $(r_1^2\,|\ln r_1|)^{-1/2}$. Такое поведение скорости на границе означает, что в процессе схлопывания несжимаемой оболочки кинетическая энергия, которая в нашем рассмотрении постоянна, все больше и больше концентрируется на внутренней поверхности лайнера.

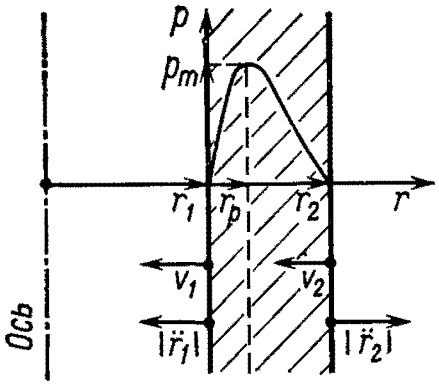
9.8. Другое существенное отличие случая цилиндрической геометрии от плоской связано с распределением давления в сходящейся жидкой оболочке, которое определяется из уравнения (9.10):

$$p(r, r_1)=\frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)-\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}\right]. \qquad (9.20)$$

При этом было использовано соотношение

$$\left[r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right]\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{2}v_1^2\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right], \qquad (9.21)$$

полученное из того же уравнения (9.10) при $r\to r_2$. Максимум



Фиг. 9.2. Распределение давления в свободно схлопывающейся цилиндрической оболочке.

давления достигается на радиусе r_p, который легко определяется из условия $\partial p/\partial r\equiv 0$ и равен

$$\left(\frac{r_p}{r_1}\right)^2=\left(1+\frac{r_1^2}{R_0^2}\right)\ln\left(1+\frac{R_0^2}{r_1^2}\right). \qquad (9.22)$$

Это соотношение позволяет показать, что при $r=r_p$ жидкость имеет постоянную скорость, в то время как при $r_1<r<r_p$ она ускоряется, а при $r_p<r<r_2$ замедляется (фиг. 9.2).

Оболочка, сжимающая магнитный поток

9.9. Задача о компрессии магнитного потока несжимаемым проводником будет полностью определена, если дополнительно к начальным условиям (9.12) или (9.13) определить *граничные условия*

$$p_2\equiv 0 \qquad (9.23)$$

и

$$p_1=\frac{1}{2}\mu_0H^2=\frac{1}{2}\mu_0H_0^2\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^4. \qquad (9.24)$$

Последнее означает, что магнитное давление начального поля H_0, полученное из уравнения (9.2) для сохранения потока, приложено к внутренней границе. Способом, во многом аналогичным использованному в п. 9.7 для свободного лайнера, можно получить соотношение между скоростью схлопывания v_1 и радиусом r_1 для оболочки, сжимающей поток. Для этого необходимо добавить к левой части уравнения, определяющего энергетический баланс (9.15) или (9.16), потенциальную магнитную энергию

$$W_M - W_{M_0} = \int\limits_{R_1}^{r_1} 2\pi r_1 p_1 \, dr_1 - W_{M_0} = \pi R_1^2 \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 \left(\frac{R_1^2}{r_1^2} - 1 \right),$$

где W_{M_0} определяется соотношением (9.3). По аналогии с приближением (9.18) отсюда получаем

$$\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 \approx \frac{1 - (r_t/r_1)^2}{(r_1^2/R_0^2) \ln (1 + R_0^2/r_1^2)} \tag{9.25}$$

Здесь дополнительно к условию (9.17) предполагалось, что

$$W_{M_0} \ll W_{K_0} \tag{9.26}$$

и что r_t — радиус точки поворота, определенный в (9.4):

$$\left(\frac{r_t}{R_1} \right)^2 \approx \frac{W_{M_0}}{W_{K_0}}. \tag{9.27}$$

Приближение (9.25) содержит ряд полученных ранее результатов. Заметим, что для $v_1 = 0$ имеем $r_1 = r_t$, а при $r_t \to 0$ равенства (9.25) и (9.18) идентичны.

9.10. Если, кроме того, лайнер остается тонким и в области радиуса поворота, так что

$$\frac{R_0^2}{r_1^2} \ll 1, \tag{9.28}$$

то соотношение (9.25) преобразуется в выражение

$$\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 \approx 1 - \left(\frac{r_t}{r_1} \right)^2, \tag{9.29}$$

из которого определяется замедление

$$\left| \frac{dv_1}{dt} \right| \approx \frac{v_0^2 r_t^2}{r_1^3}. \tag{9.30}$$

Предположение (9.28), однако, нельзя считать справедливым, так как лайнер к концу сжатия существенно утолщается. Если, например, $r_2/r_t \sim 3$, то точные расчеты [1.110] показывают, что максимальное замедление, вычисленное по (9.30), оказывается завышенным в четыре раза.

§ 2. КОМПРЕССИЯ ПОТОКА РЕАЛЬНЫМИ ПРОВОДНИКАМИ

9.11. Для правильного понимания работы магнитокумулятивных систем, в частности с точки зрения их максимальных возможностей, необходимо по меньшей мере учитывать *сжимаемость* и *электропроводность* сходящейся оболочки. Например, в предыдущей главе было показано, что диффузия магнитного поля определяет предельно достижимые магнитные поля. В следующих разделах эти результаты будут распространены на цилиндрическую геометрию с учетом зависящей от температуры проводимости. Однако, как будет показано, сжимаемость проводников является наиболее сильным условием, ограничивающим получение сверхсильных магнитных полей.

Правильное описание экспериментов по компрессии магнитного потока может быть проведено только в рамках *магнитогидродинамической теории* (МГД). Однако детальное исследование этих проблем лежит в стороне от задач данной книги. Тем не менее для полноты изложения будет приведен ряд необходимых уравнений МГД-теории [1]), а в последующих разделах обсуждаются наиболее важные физические следствия, вытекающие из основных уравнений.

МГД-теория базируется на основных уравнениях электродинамики (см. также п. 2.1)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \tag{9.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{9.32}$$

которые используются для описания проводящей жидкости, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, что учитывается добавлением закона Ома в форме (см. п. 2.1)

$$\mathbf{j} = \sigma [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mu\mathbf{H})]. \tag{9.33}$$

Здесь предполагается, что $|v|$ намного меньше скорости света.

К этим уравнениям добавляются уравнения гидродинамики, которые соответствуют законам сохранения механических величин (массы, импульса, энергии) (см. [3.4]), т. е. кроме уравнения непрерывности (9.5) — *уравнение Эйлера*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \tag{9.34}$$

($\mathbf{F}$ — сила на единицу объема) и *основное уравнение термодинамики*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varepsilon - \frac{j^2}{\rho\sigma} = -p \left[\frac{\partial (1/\rho)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\, (1/\rho) \right] + \frac{\lambda}{\rho} \Delta\theta, \tag{9.35}$$

---

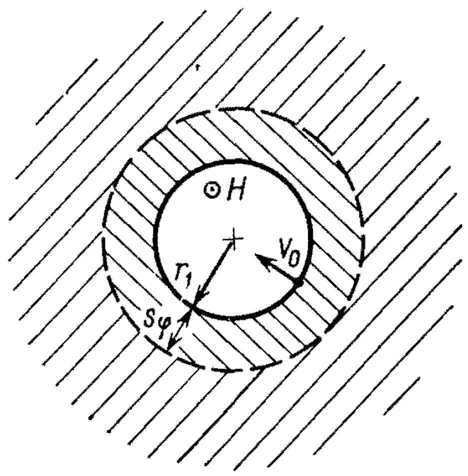
[1]) Более детально см. в П4.

где ε — удельная внутренняя энергия, θ — температура, λ — коэффициент теплопроводности; все другие обозначения использовались ранее. Кроме того, необходимо определить свойства проводящей жидкости, задавая *уравнение состояния*, *закон изменения электропроводности* и т. д. И наконец, задача будет полностью определена, если будут заданы *начальные* и *граничные* условия.

Система уравнений, описывающая компрессию магнитного потока сходящейся проводящей оболочкой, может быть решена только численными методами даже для наиболее простого случая несжимаемой жидкости. Следовательно, в самом лучшем случае возможно привести только некоторые выражения, аппроксимирующие результаты численных расчетов.

Несжимаемая оболочка конечной проводимости

9.12. Если учесть конечную *электропроводность* оболочки, то, как известно, часть захваченного магнитного потока будет диффундировать в проводник в процессе компрессии и будет



Фиг. 9.3. Компрессия магнитного потока оболочкой с конечной проводимостью и постоянной скоростью схлопывания.

потеряна для дальнейшего сжатия (фиг. 9.3). Вводя коэффициент компрессии потока $\lambda = \phi/\phi_0$ [определяемый выражением (8.4)], для коэффициента усиления поля в зависимости от радиуса вместо уравнения (9.1) можно записать соотношение

$$\frac{H}{H_0} = \lambda \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^2 \tag{9.36}$$

(типичные значения величины λ приведены на фиг. 9.4). После дифференцирования это уравнение дает

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = v_1 \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{\lambda}\left|\frac{d\lambda}{dt}\right|\right). \tag{9.37}$$

Это соотношение показывает, что максимальное поле в процессе компрессии достигается не обязательно при $v_1 \to 0$.

Для коэффициента усиления поля формально можно написать

$$\frac{H}{H_0} = \frac{R_1^2}{(r_1 + s_\varphi)^2}, \tag{9.38}$$

где s_φ — толщина скин-слоя, определенная в п. 3.12. Для удовлетворительного описания динамики сжатия можно воспользоваться подходящим приближением для s_φ, таким, как даваемое уравнением (8.33) или табл. 4.II и 4.IV.

Наиболее точные приближения получаются при использовании *метода скин-слоя* (п. 8.12). Например, расчеты, проведенные в пп. 8.12—8.14, можно легко распространить на цилиндрическую геометрию и таким образом получить оценку коэффициента компрессии потока λ как функции радиусом r_1 [уравнения (8.35) или (8.36)] и максимального коэффициента усиления поля H_m/H_0.

9.13. Поучительно хотя бы качественно рассмотреть простой пример, поясняющий физический смысл максимального коэффициента усиления магнитного поля. Из п. 3.39 известно, что характеристическое время диффузии магнитного поля из цилиндрической полости радиусом r равно

$$\tau_{\text{дифф}} = \frac{r^2}{\varkappa_0}$$

($\varkappa_0$ — коэффициент диффузии магнитного поля), тогда как время компрессии при постоянной скорости схлопывания v_0

$$\tau_{\text{компр}} = \frac{r}{v_0}.$$

Оба значения времени становятся равными при радиусе

$$r_{md} = \frac{\varkappa_0}{v_0}.$$

Следовательно, в первой стадии сжатия (от R_1 до r_{md}) можно пренебречь потерями потока, но, начиная с этого радиуса, потери потока быстро возрастают. Отсюда можно сделать вывод, что максимальное поле достигается в области r_{md}, т. е.

$$\frac{H_{md}}{H_0} \approx \frac{R_1^2}{r_{md}^2} = \alpha_1 R_M^2, \tag{9.39}$$

где

$$R_M = \frac{R_1 v_0}{\varkappa_0} \tag{9.40}$$

есть *магнитное число Рейнольдса*. Для определения точной величины константы α_1 необходимо провести строгие расчеты (численные расчеты, выполненные в предположении постоянной скорости компрессии v_0 [1.39], дают $\alpha_1 = 0{,}04$).

9.14. Когда напряженность магнитного поля на поверхности лайнера достигает критического значения h_c, определяемого уравнением (4.69) (см. также табл. 10.IV), предположение о постоянной проводимости становится несправедливым. Действительно, в гл. 4 показано, что если проводимость меняется по закону

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1+\beta Q}, \tag{9.41}$$

толщина скин-слоя s_φ резко возрастает, грубо говоря, в H_0/h_c раз по сравнению со случаем постоянной проводимости.

Приведем теперь оценку максимально достижимых полей. Для этого сначала вернемся к п. 4.25, в котором показано, что для приведенного выше закона изменения проводимости выполняется соотношение

$$Q = c_v\theta \approx \frac{1}{2}\mu_0 H^2. \tag{9.42}$$

Следовательно, для $H \gg h_c$ можно написать

$$\sigma \approx \sigma_0 \left(\frac{h_c}{H}\right)^2. \tag{9.43}$$

Так как потери потока в основном происходят в конце процесса компрессии, когда проводимость минимальна:

$$\sigma = \sigma_{\text{мин}} \approx \sigma_0 h_c^2 H_{md}^{-2}, \tag{9.44}$$

можно распространить приближенное для максимального коэффициента усиления, полученное в п. 9.13, на рассматриваемый случай

$$\frac{H_{md}}{H_0} \approx (R_1 v_0 \mu_0 \sigma_{\text{мин}})^2 = \alpha_2^5 R_M^2 \left(\frac{h_c}{H_{md}}\right)^4. \tag{9.45}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{H_{md}}{H_0} = \alpha_2 \left[\frac{R_M}{(H_0/h_c)^2}\right]^{2/5}, \tag{9.46}$$

где константа R_M определяется уравнением (9.40), а постоянная α_2 приведена в соотношении (9.47) и составляет величину порядка единицы.

9.15. При первой попытке численного решения МГД-уравнений для обсуждаемых физических проблем были приняты следующие упрощающие предположения:

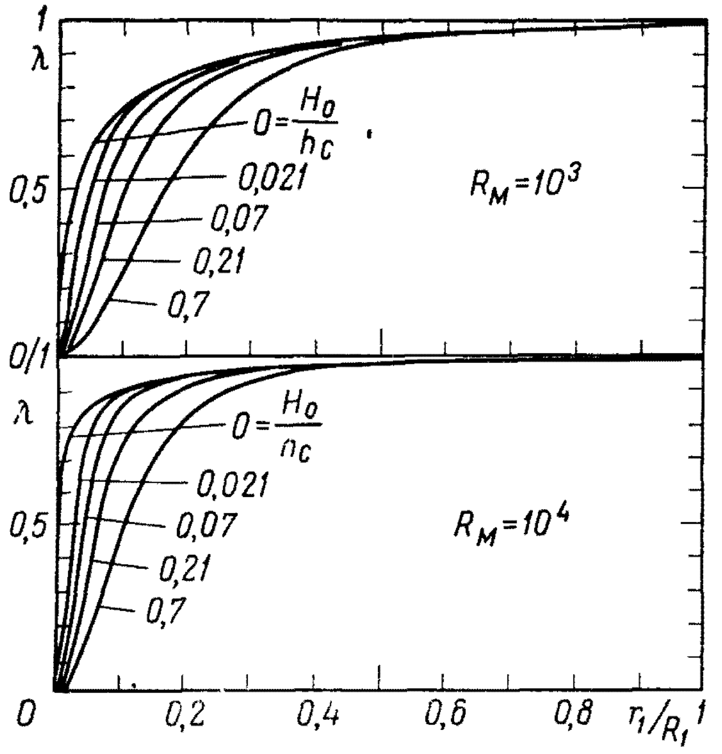
а) несжимаемость лайнера;

б) постоянная скорость компрессии v_0;

в) изменение электропроводности, согласно соотношению (9.41).

Как следствие предположения «а» уравнение непрерывности (9.5) преобразуется в более простую форму (9.6), а правая часть уравнения (9.35) обращается в нуль, так как из п. 4.3 известно, что теплопроводностью в первом приближении можно пренебречь. Предположение «б» исключает проблему динамики, иными словами, исключается уравнение (9.34).

В работах [1.39, 9.10] были получены численные решения этой задачи. Из фиг. 9.4, например, видно, что компрессия до относительных радиусов $r_1/R_1 = 0{,}1 \ldots 0{,}2$ происходит с очень малыми потерями потока, но, начиная с этого момента, потери



Фиг. 9.4. Изменение коэффициента сжатия магнитного потока [см. (9.36)] во время компрессии, численно рассчитанное в [1.39].

Значение $R_M = 10\,000$ взято в качестве примера для медной оболочки с $R_1 = 5$ см и $v_0 = 0{,}25$ см/мкс.

потока быстро возрастают. Так как нас интересуют *параметры, соответствующие максимальному полю*, численные расчеты можно аппроксимировать следующими выражениями:

$$\frac{H_{md}}{H_0} \approx 1{,}1 \left[\frac{R_M}{(H_0/h_c)^2}\right]^{2/5}, \tag{9.47}$$

$$\frac{r_{md}}{R_1} \approx 0{,}25 \left[\frac{(H_0/h_c)^2}{R_M}\right]^{1/5}, \tag{9.48}$$

$$\vartheta = \frac{c_v\theta}{{}^1/_2\mu H^2} \approx 1. \tag{9.49}$$

Для коэффициента компрессии магнитного потока в момент максимума поля, следовательно, будем иметь

$$\lambda_{md} = \frac{H_{md} r_{md}^2}{H_0 R_1^2} \approx 0{,}07 \tag{9.50}$$

9.16. Если с помощью уравнения (9.40) переписать соотношение (9.47) в виде

$$\frac{H_{md}}{h_c} \approx 1{,}1 \left[\frac{1}{\varkappa_0^2 h_c} v_0^2 (H_0 R_1^2) \right]^{1/5}, \tag{9.51}$$

то станет отчетливо видно, что значения максимально достижимых полей, получающихся при схлопывании несжимаемой оболочки с переменной проводимостью, можно очень незначительно изменять, варьируя начальную скорость v_0 или начальный захваченный поток $(\pi R_1^2 \mu_0 H_0)$.

Так, *например*, для медного проводника (табл. 10.IV) и очень высоких начальных значений поля $H_0 = 100$ кЭ; $R_1 = 5$ см, $v_0 = 0{,}5$ см/мкс (т. е. $R_M = 20\ 000$) соотношение (9.51) дает $H_{md} = 18$ МЭ, а из (9.48) $r_{md} = 0{,}1$ см.

Сжимаемая оболочка бесконечной проводимости

9.17. Учет в расчетах *сжимаемости* оболочки является важным шагом в приближении к реальным процессам. Для отделения этой задачи от процесса диффузии предположим на время, что используется идеальный проводник ($\sigma \to \infty$). В этом случае задача становится чисто гидродинамической и полностью описывается уравнениями (П4.14)—(П14.16) (без членов с j_ϑ и λ) и уравнением состояния для жидкости. Компрессия магнитного поля определяется через граничные условия (9.24). Очевидно, что эти уравнения могут быть решены только численными методами. В последующих разделах будут в первую очередь кратко описаны наиболее важные физические эффекты, а затем приведены некоторые результаты численных расчетов.

Наиболее существенное различие между сформулированной задачей и простой теорией с несжимаемой оболочкой (пп. 9.4—9.9) состоит в том, что теперь импульс давления распространяется с *конечной скоростью* через жидкость и в конечном счете проявляется в виде ударных волн (п. 10.21). Соответственно и энергия передается от одной области жидкости к другой с конечной скоростью.

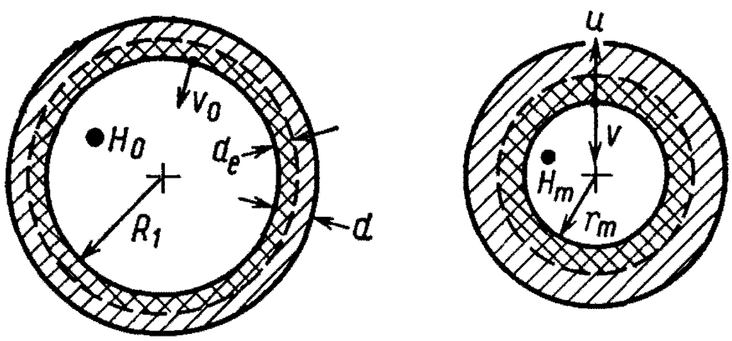
Учет сжимаемости приводит к важным выводам даже для случая свободно сходящейся оболочки. Например, если от начала процесса до $r_1/R_1 \gtrsim 0{,}2$ скорость схлопывания для сжимаемой жидкости приблизительно следует уравнению (9.18), то для меньших радиусов она увеличивается не так быстро. Скорость зависит от различных параметров, таких, как начальная относительная толщина лайнера, число Маха v_0/c_0 (отношение начальной скорости к скорости звука). Для типичного генератора сверхсильного поля с

$$\frac{(R_2 - R_1)}{R_1} \approx 0{,}05$$

при $v_0/c_0 \approx 1$ и для достаточно малых радиусов $(r_1/R_1 \leqslant 0{,}1)$ результаты проведенных численных расчетов [1.32] дают асимптотическое выражение для скорости

$$v_1 \approx c_0 \ln\left(\frac{r_1}{R_1}\right). \tag{9.52}$$

9.18. Так как магнитное давление на внутренней поверхности лайнера непрерывно возрастает в процессе сжатия (9.24), внутренние слои оболочки постепенно сжимаются. В п. 5.4 было показано, что поверхность к тому же движется (принимая во внимание



Фиг. 9.5. Схлопывание сжимаемой оболочки.

несжимаемость жидкости) приблизительно со скоростью u проникающей ударной волны (фиг. 9.5). Очевидно, что максимальное поле будет достигаться при

$$u = v_0, \tag{9.53}$$

где v_0 — скорость (постоянная) схлопывания оболочки.

«Максимальное» магнитное поле H_{m0} в идеальном случае можно получить, приравнивая магнитное давление и давление в ударной волне (5.10):

$$\frac{1}{2}\mu_0 H_{m0}^2 = \rho_0 v_0^2 \left(\frac{c_0}{v_0} + S\right), \tag{9.54}$$

где постоянные c_0 и S для различных металлов приведены в табл. 10.1. Так как c_0/v_0 и S порядка единицы, то отсюда следует, что плотность энергии максимально достижимых магнитных полей примерно вдвое выше плотности кинетической энергии лайнера.

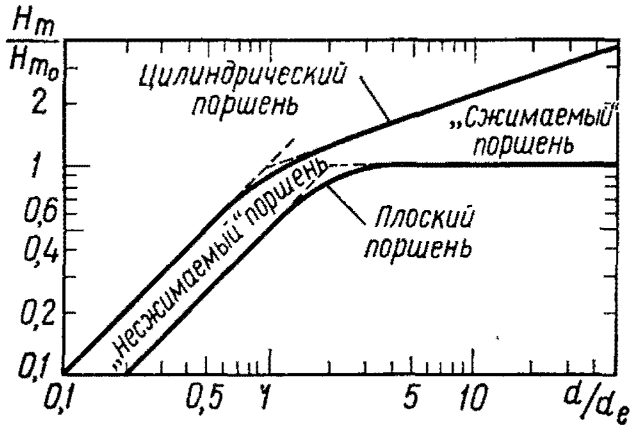
9.19. В связи с конечной скоростью возникающей ударной волны только часть начальной кинетической энергии преобразуется в магнитную энергию сжимаемого поля. Этот эффект можно учесть введением *эффективной толщины* d_e, которая определяется как толщина внутреннего слоя лайнера в начальном положении. Кинетическая энергия этого слоя полностью преобразуется в магнитную энергию конечного поля. Согласно этому определению, можно записать (для $d_e \ll R_1$)

$$2\pi d_e R_1 \rho_0 \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H_{m_0}^2 \pi r_{m_0}^2,$$

где r_{m_0} — радиус, соответствующий максимальному магнитному полю. Отсюда, используя (9.54) и закон сохранения магнитного потока ($H_{m_0} r_{m_0}^2 = H_0 R_1^2$), получаем

$$d_e = \frac{H_0 R_1}{v_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{2\rho_0}\left(\frac{c_0}{v_0} + S\right)}. \tag{9.55}$$

9.20. Очевидно, что до тех пор, пока начальная толщина лайнера мала по сравнению с d_e, сжимающая оболочка ведет



Фиг. 9.6. Максимальные магнитные поля, достигаемые с использованием сжимаемой цилиндрической оболочки бесконечной проводимости [1.32].

Для сравнения приведены коэффициенты усиления, получаемые с плоским поршнем. Согласно определению эффективной толщины, принято, что $(d_e)_{\text{плоск}}/(d_e)_{\text{цилиндр}} = 2\,x_1/R_1$, где x_1 – расстояние от плоского поршня до плоскости симметрии схлопывания.

себя как несжимаемая жидкость. Из соотношения (9.4) непосредственно получаем *максимальное динамическое поле* H_{mc}

$$\frac{H_{mc}}{H_{m_0}} \approx \frac{d}{d_e} \qquad \left(\frac{d}{d_e} \leqslant 1\right) \tag{9.56}$$

Когда d становится больше d_e, необходимо учитывать сжимаемость оболочки. Соответствующая задача была рассмотрена Сомоном, численно решившим систему уравнений, указанных в п. 9.17 совместно с уравнением состояния (10.28). Его результаты можно аппроксимировать простым выражением (фиг. 9.6)

$$\frac{H_{mc}}{H_{m_0}} \approx \left(\frac{d}{d_e}\right)^{1/3} \qquad \left(1 < \frac{d}{d_e} \leqslant 30\right). \tag{9.57}$$

Заметим, что конечное поле может быть больше H_{m0}, так как скорость цилиндрической сходящейся оболочки, как это видно из уравнения (9.52), увеличивается во время компрессии.

Исходя из полученных выражений, легко рассчитать и другие величины, такие, как радиус r_{mc}, соответствующий максимальному магнитному полю H_{mc}, или энергетическую эффективность

$$\eta_c = \frac{\text{конечная магнитная энергия} - \text{начальная магнитная энергия}}{\text{начальная кинетическая энергия}}. \quad (9.58)$$

Например, используя (9.57) для случая толстой оболочки, имеем

$$\eta_c \approx \left(\frac{d_e}{d}\right)^{2/3}. \quad (9.59)$$

Рассматривая пример, который обсуждался в п. 9.16, получаем динамический предел для медного проводника (табл. 10.IV) толщиной $d = 0{,}3$ см, $d_e = 0{,}1$ см, $H_{m0} = 11{,}3$ МЭ, $H_{mc} = 16{,}5$ МЭ, $r_{mc} = 0{,}4$ см. Это дает примерно такое же значение магнитного поля, которое получилось при обсуждении предельных значений, обусловленных диффузией (п. 9.16). Однако в данном случае ограничения сильнее, чем при учете только одной диффузии. Действительно, если в случае диффузии использовался только один «свободный» параметр v_0, то в соотношении (9.51) содержится дополнительно еще и поток $(\mu_0 H_0 \pi R_1^2)$.

Реальный проводник

9.21. Реальная оценка динамики сжатия показывает, что необходимо одновременно учитывать и диффузию поля, и сжимаемость проводника. Эта основная задача, следовательно, требует решения полного набора уравнений магнитной гидродинамики совместно с соответствующими уравнениями состояния для меди при учете закона изменения электропроводности. Такая система уравнений может быть решена только численными методами. В качестве примера приведем решение для одномерного случая осесимметричной компрессионной задачи, полученное в работах [1.30, 5.2] как для B_ϑ-, так и для B_z-геометрии, которые можно описать и решить с достаточной точностью. Не вдаваясь в детали (которые в действительности не очень существенны для понимания), воспользуемся табл. 9.I, в которой суммированы наиболее важные результаты, полученные в работе [1.30], и сравним их с результатами, получаемыми при использовании рассмотренных выше приближенных выражений.

Это сравнение и проведенное выше обсуждения показывают, что наиболее существенные эффекты играют основную роль вблизи точки поворота и позволяют сделать следующие выводы.

а. *Максимальное поле* H_m определяется главным образом динамикой сжимающего поршня, т. е. $H_m \approx H_{mc}$. Действительно,

ТАБЛИЦА 9.1

Результаты теоретических расчетов [1])

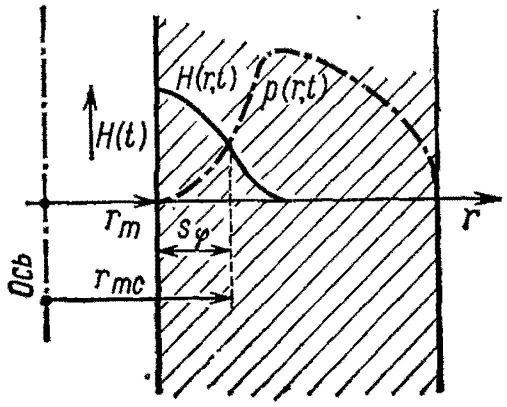
Проводимость	Максимальное поле H_m, МЭ	Минимальный радиус r_m, см	Коэффициент сжатия потока λ_m	Относительная магнитная энергия в πr_m^2, %	Относительная магнитная энергия полная, %	Относительная внутренняя энергия, %	Относительная кинетическая энергия, %
Численные расчеты [1.30]							
а) проводимость $\sigma = \infty$	13,1	0,32	1	44	44	35	21
б) проводимость металла определяется (10.72); частично проводящий пар	14,0	0,23	0,57	26	37	39	24
в) проводимость металла определяется (9.41); непроводящий пар	11,4	0,26	0,59	22	30	33	37
г) то же, что и в п. «в», но температурный коэффициент β увеличен в 3 раза	10,5	0,21	0,356	12	26	30	44
Аппроксимация [1.39]							
д) сжимаемая оболочка, $\sigma = \infty$ (см. п. 9.20)	13,1	0,32	1	44	44	—	—
е) проводимость определяется (9.41); несжимаемая оболочка с постоянной скоростью схлопывания v_0 (см. п. 9.15)	13,9	0,08	0,07	—	—	—	—
ж) сжимаемая оболочка, проводимость определяется (9.41) [2])	13,1	0,23	0,51	24	44	—	—

[1]) Начальные значения: медная оболочка, $R_1 = 3,81$ см, $R_2 = 4,13$ см, $v_0 = 0,37$ см/мкс, $H_0 = 90$ кЭ ($W_{M_0} = 1,47$ кДж/см, $W_{K_0} = 480$ кДж/см).

[2]) $H_m = H_{m_c}$ из варианта «д», но $r_m = r_{m_d}$ рассчитано последовательно из фиг. 9.4 (кривая $R_M = 10^4$, $H_0/h_c \approx 0,21$): первое приближение $r_1 = 0,32$ см $\rightarrow \lambda = 0,82 \rightarrow r_{m_d} = 0,25$; второе приближение $r_1 = 0,25$ см $\rightarrow \lambda = 0,51 \rightarrow r_{m_d} = 0,23$.

если учесть толщину скин-слоя s_φ (фиг. 9.7), то вывод, полученный в п. 9.16 для случая цилиндрической поверхности радиусом r_{mc}, остается справедливым; необходимо лишь расширить внутреннюю поверхность, к которой по существу прикладывается магнитное давление, до значения радиуса примерно $r_m + s_\varphi$ (см. пп. 5.4 и 9.31).

б. *Минимальный радиус* r_m в основном зависит от проводимости поршня. Если H_m определяется так, как указано в п. «а»,



Фиг. 9.7. Разрез реальной оболочки, сжимающей поток в момент максимального поля.

то этот радиус, как и следовало ожидать, естественным образом получается из закона сохранения потока $H_m(r_m + s_\varphi)^2 = H_0R_1^2$ (см. табл. 9.I, п. «ж»).

Использование этих выводов для взрывомагнитных генераторов приводит к типичным величинам $H_m = 5 \ldots 15$ МЭ и $r_m = 0{,}3 \ldots 1$ см. Однако при экстремальных условиях могут доминировать и другие эффекты. Например, очевидно, что если конечный радиус стремится к значениям того же порядка, что и диффузионный (r_{md}), или меньше (т. е. порядка миллиметров, см. п. 9.16), то максимальное поле будет определяться только диффузионными потерями, т. е. $H_m \approx H_{md}$.

§ 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛЯ С ПОВЕРХНОСТЬЮ МЕТАЛЛА

9.22. Использование рассматриваемых магнитокумулятивных генераторов сверхсильных магнитных полей может быть ограничено, помимо сильной диффузии магнитного поля и сжатия лайнера ударной волной, также и рядом других эффектов. Здесь будут рассмотрены главным образом процессы вскипания поверхностного слоя оболочки (этот эффект уже обсуждался в п. 5.19) и нестабильности, возникающие при взаимодействии металлической поверхности с магнитным полем. Жидкий металл в принципе подвержен всем типам магнитогидродинамических неустойчивостей. Однако для всех практических случаев, представляющих для нас интерес, наиболее существенную роль играют *нестабильности типа Релея — Тейлора*. Часто их называют нестабильностью типа Крускала — Шварцшильда, так как эти авторы распространили чисто гидродинамическую задачу на магнитогидродинамический случай [9.56].

В системах с компрессией магнитного потока в результате возникновения нестабильностей этого типа с передней поверхности поршня выбрасываются капли (или пар), которые проникают в объем, где генерируется и используется сверхсильное поле, что существенно ограничивает возможности таких генераторов.

Нестабильность Релея — Тейлора

9.23. Сначала обсудим оригинальную гидродинамическую формулировку задачи о нестабильности. Рассмотрим две идеальные жидкости с массовой плотностью ρ_1 и ρ_2, разделенные границей, которая в начальный момент описывается уравнением

$$\eta(t=0)=\eta_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}); \tag{9.60}$$

здесь предполагается, что *волновой вектор* $\mathbf{k}$ параллелен оси x, а

$$|\mathbf{k}|=k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{9.61}$$

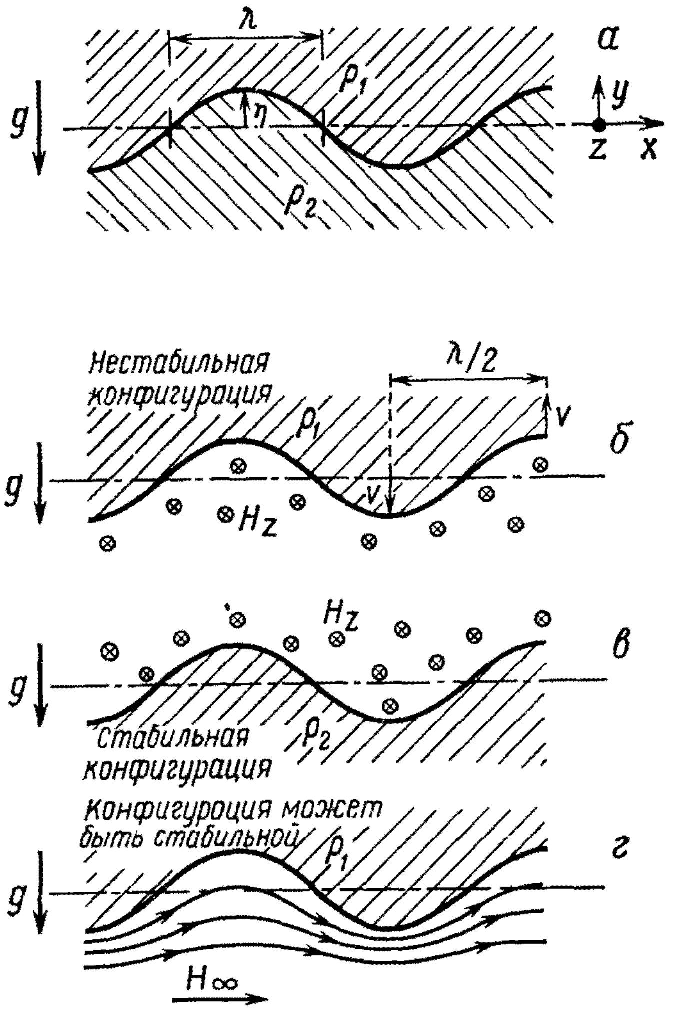
есть *волновое число* (фиг. 9.8, *а*). Из теории слабых возмущений (см., например, [9.50]) известно, что поверхностное натяжение T_S на границе раздела двух жидкостей, находящихся в поле силы тяжести g, определяет временну́ю зависимость смещения, которая описывается выражением

$$\eta=\eta_0\operatorname{ch}\omega t\cos kx, \tag{9.62}$$

а частота ω определяется *дисперсионным соотношением*

$$-\omega^2=gk\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}+\frac{k^3T_S}{\rho_2+\rho_1}. \tag{9.63}$$

Отсюда видно, что при $\rho_2>\rho_1$ начальное возмущение сохраняет свою колебательную природу, а его амплитуда не превышает начальную η_0; другими словами, взаимодействие стабильно относительно малых возмущений ($\eta_0\ll\lambda$). Если же $\rho_2<\rho_1$, то стабильность имеет место только тогда, когда возникающий при смещении восстанавливающий член, который обусловлен поверхностным натяжением, будет больше инерциального члена, т. е. $k^2 T_S > g(\rho_2 - \rho_1)$; в противном случае возмущение будет возрастать экспоненциально.



Фиг. 9.8. Нестабильности Релея — Тейлора.
а — гидродинамическая; *б* — *г* — магнитогидродинамическая.

9.24. Эти результаты формально остаются справедливыми и для гидромагнитной задачи, показанной на фиг. 9.8, *б* — *г*, если только она интерпретируется должным образом. Очевидно, например, что плотность одной из жидкостей необходимо положить равной нулю. Для случая чисто аксиального поля H_z, следовательно, будем иметь

$$\omega^2 = \mp gk; \tag{9.64}$$

здесь знак плюс относится к ситуации, изображенной на фиг. 9.8, *б* (нестабильность), а минус — к фиг. 9.8, *в* (стабильность).

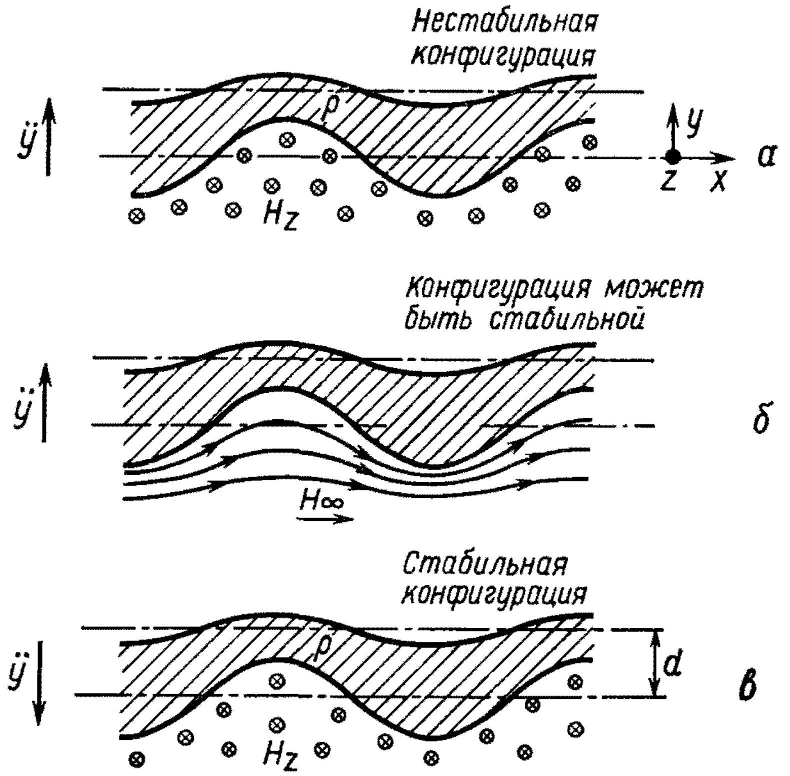
Для случая, приведенного на фиг. 9.8, *г*, ожидается появление дополнительного члена, формально аналогичного члену, обусловленному поверхностным натяжением, так как из п. 5.3 известно, что вдоль магнитных силовых линий существует натяжение $^1/_2\mu H^2$. Точные расчеты [9.50] для случая идеально проводящей жидкости показывают, что возникающее магнитное поверхностное натяжение равно

$$T_M = \frac{\mu_0 H_\infty^2 \cos^2 \varphi}{k}, \tag{9.65}$$

где φ — угол между $\mathbf{H}_\infty$ и $\mathbf{k}$. Вместо равенства (9.63) из (9.64) и (9.65) получается *гидромагнитное дисперсионное соотношение*

$$\omega^2 = \mp gk - \frac{k^3}{\rho}(T_M + T_S); \tag{9.66}$$

знак первого члена выбирается так же, как и в равенстве (9.64). [В большинстве практических случаев членом T_S можно пренебречь (см. табл. 10.II).] В случае нестабильной конфигурации



Ф и г. 9.9. Нестабильность Релея — Тейлора в тонкой пластине.

(знак плюс перед членом gk) второй член, однако, может стабилизировать возмущения, длина волны которых достаточно мала (при $T_S \approx 0$), т. е. когда

$$\lambda < \frac{2\pi}{\rho g} \mu_0 H_\infty^2 \cos^2 \varphi. \tag{9.67}$$

9.25. Полученные соотношения носят общий характер. Например, критерий стабильности не изменяется [9.51], если вместо бесконечно толстого слоя жидкости рассмотреть слой толщиной d, поддерживаемый магнитным давлением (фиг. 9.9)

$$\frac{1}{2} \mu_0 H_\infty^2 = d\rho g; \tag{9.68}$$

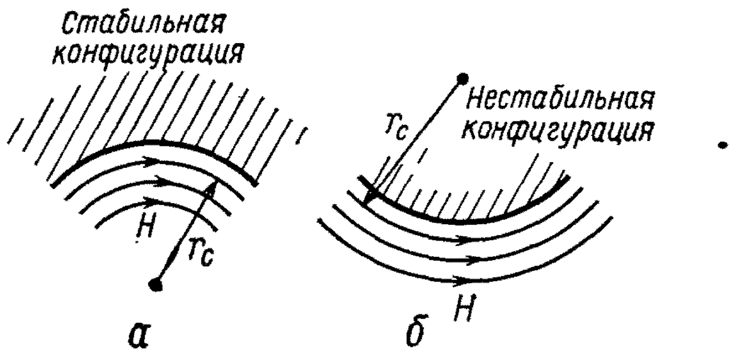
критерий стабильности (9.67) в этом случае преобразуется к более простому виду

$$\lambda < 4\pi d \cos^2 \varphi. \tag{9.69}$$

Как и раньше, возмущения, которые не изгибают магнитных силовых линий ($\varphi \approx {}^1/_2\pi$), наиболее опасны.

9.26. Все эти результаты можно непосредственно использовать при анализе стабильности движущейся оболочки, предусмотрев замену (по направлению) сил тяжести на силы инерции, т. е. изменив знак ускорения жидкости. Следовательно, когда вектор ускорения на поверхности раздела поле — жидкость направлен в жидкость (фиг. 9.9, *а*, *б*), эта поверхность стабильна только относительно малых возмущений с длиной волны, удовлетворяющей критерию (9.69). В противном случае (фиг. 9.9, *в*) имеет место стабильность при возмущениях с любой длиной волны.

9.27. В принципе жидкий металл подвержен всем типам гидродинамических нестабильностей, среди которых нестабильность



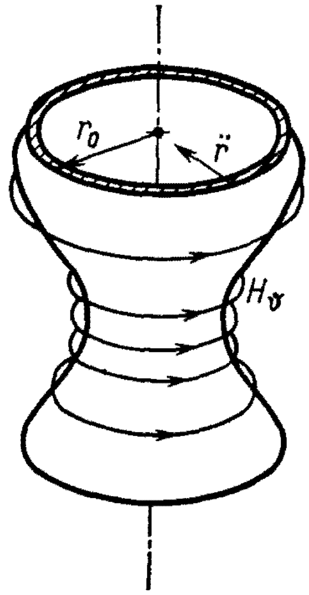
Фиг. 9.10. Стабильная (*а*) и нестабильная (*б*) конфигурации системы жидкость — поле.

Релея — Тейлора является только примером. Для полного изучения проблем гидромагнитных неустойчивостей можно рекомендовать обширную литературу (см., например, [9.50]), в частности учебники по физике плазмы. Здесь, однако, следует отметить, что основные результаты теории стабильности применительно к конфигурации жидкость — поле, изображенной на фиг. 9.10, можно сформулировать следующим образом [9.50]. Когда центр кривизны линий поля лежит вне жидкости (или плазмы), конфигурация стабильна (относительно обменного взаимодействия жидкости с магнитным потоком; фиг. 9.10, *а*); в противоположном случае имеет место нестабильность (обменная нестабильность).

Возникает вопрос, в каком случае показатель развития нестабильностей ω может быть ограничен диссипативными эффектами. Простой анализ показывает, например, что роль вязкости пренебрежимо мала, во всяком случае в рамках линейной теории возмущений во всех практически интересных для данного рассмотрения случаях [1.109]. То же самое относится и к роли конечной электропроводности. В частности, в связи с тем, что при экспериментах со сверхсильными полями вскипающая поверхность лайнера нагревается за счет процесса диффузии поля (п. 9.31). Следовательно, в основном можно не учитывать вязкость и электропроводность при рассмотрении проблем стабильности.

Нестабильности схлопывающейся цилиндрической оболочки

9.28. Рассмотрим вначале цилиндрическую оболочку с аксиальным током, сжимающуюся под действием собственного азимутального магнитного поля (фиг. 9.11). Очевидно, что наиболее



Фиг. 9.11. «Сосисочная» нестабильность цилиндрической оболочки.

быстро возрастают осевые возмущения, не изгибающие магнитных силовых линий. Как показано в работе [9.51], нестабильности, обусловленные возмущениями такого типа, характеризуются дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = |\ddot{r}| \left[\frac{1}{2r_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{4r_0^2} + k^2 \right)} \right], \tag{9.70}$$

где $\ddot{r}$ — центростремительное ускорение оболочки. В пределе бесконечно большого начального радиуса r_0 это выражение переходит в полученное выше для плоского случая уравнение (9.64). Члены, содержащие r_0 и соответствующие более высокому магнитному давлению в области с наименьшим радиусом, приводят к так называемой *«сосисочной» неустойчивости*. Однако, поскольку интересующие нас волновые числа в основном значительно превышают $1/2r_0$, в большинстве случаев преобладают нестабильности типа Релея — Тейлора, а не «сосисочные» неустойчивости.

Время развития неустойчивости $1/\omega$ должно быть сравнимо со временем t_m, необходимым для схлопывания лайнера к оси симметрии или до радиуса поворота. Иными словами, нестабильность имеет физический смысл только в том случае, если время ее развития меньше времени компрессии.

9.29. Проблема стабильности становится, в частности, важной в экспериментах с компрессией потока, проводимых в целях создания очень сильных магнитных полей.

Рассмотрим процесс схлопывания цилиндрической оболочки чисто аксиальным полем H_z. Азимутальные возмущения развиваются наиболее быстро, так как они не связаны с изгибом магнитных силовых линий. Можно оценить скорость развития этих возмущений так же, как это было рекомендовано в п. 9.26 для плоского случая, т. е.

$$\omega^2 \approx \ddot{r}k,$$

где в k учтены возможные длины волн, определяемые условием $n\lambda = 2\pi r_1$; $n = 1, 2, \ldots$.Вблизи радиуса поворота r_t замедление $\ddot{r}$ становится очень большим (типичная величина составляет 10^{10} м·с$^{-2}$, см. фиг. 9.18), поскольку магнитное давление возрастает как $1/r^4$ [см. (9.2)]. Используя приближение (9.30) (полученное для тонких оболочек) при $r_1 = r_t$, получаем максимальное время развития неустойчивости

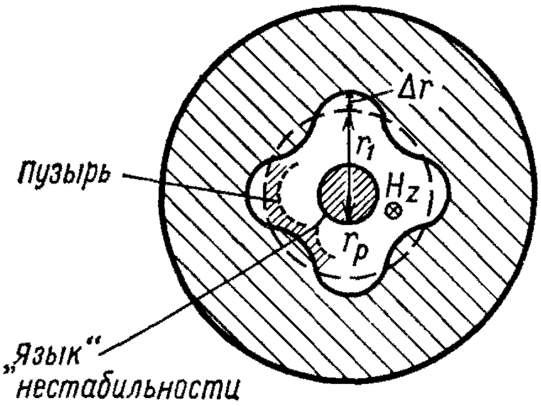
$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{r_t}{v_0}, \tag{9.71}$$

где v_0 — начальная скорость сжатия. Отсюда видно, что для малых длин волн ($n > 1$) это время становится меньше характеристического времени схлопывания r_t/v_0 [1]), т. е. к моменту достижения точки поворота нестабильности Релея — Тейлора могут уже создать заметные экспериментальные трудности. Начиная с этого момента, за время, меньше чем $1/\omega$, острые и быстроразвивающиеся «языки» нестабильности будут проникать в используемый для измерения объем поля, разрушая находящийся там датчик.

9.30. В связи с тем, что полученные результаты базируются на рассмотрении возмущений малой амплитуды, т. е. линеаризованной задачи, могут возникнуть определенные сомнения относительно их справедливости. Действительно, если амплитуда Δr гармонического возмущения становится больше примерно $^1/_2\lambda$, возникают нелинейные эффекты, которые могут быть идентифицированы по изменению формы возмущений [9.55]. «Языки» нестабильности становятся более узкими и развиваются существенно

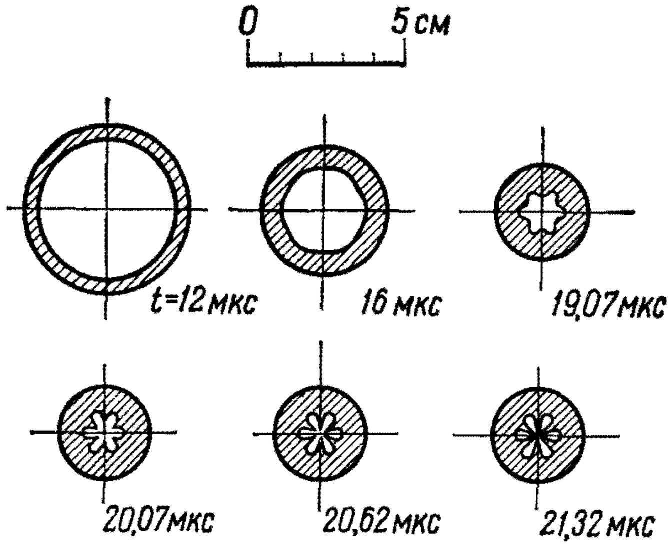
---

[1]) За время схлопывания оболочки, когда радиус изменяется от $2r_t$ до r_t, магнитное поле возрастает в 4 раза, а магнитное давление — в 16 раз.



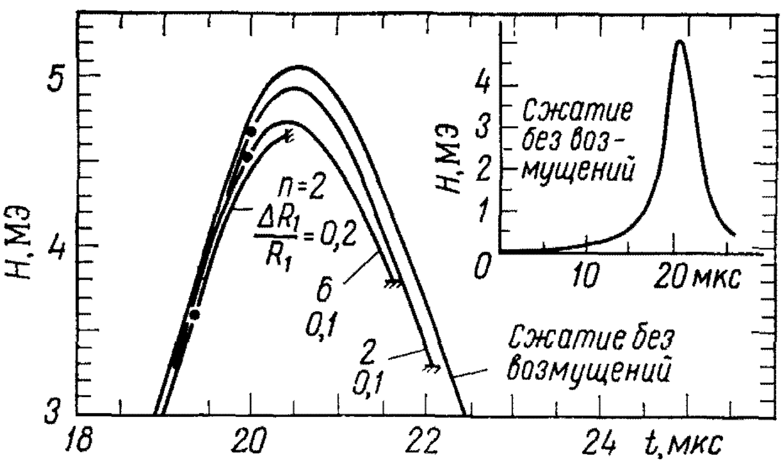
Фиг. 9.12. Нестабильность оболочки, сжимающей поток.

Гармонические возмущения (в данном случае с $n = 4$) в конце концов за счет нелинейных эффектов могут развиться в пузырьки и струи, способные разрушить датчик, находящийся в центре.



Фиг. 9.13. Развитие начального гармонического возмущения ($n = 6$, $\Delta R_1/R_1 = 0,1$) в кумулятивном эксперименте с цилиндрической геометрией [9.52].

Начальные параметры: $R_1 = 4,8$ см, $R_2 = 5$ см, $v_0 = 0,2$ см/мкс, $H_0 = 65$ кЭ [9.52]. (Результаты для случая без возмущений приведены на фиг. 9.14.)



Фиг. 9.14. Кривые зависимости поля от времени, соответствующие невозмущенному сжатию и трем различным возмущениям.

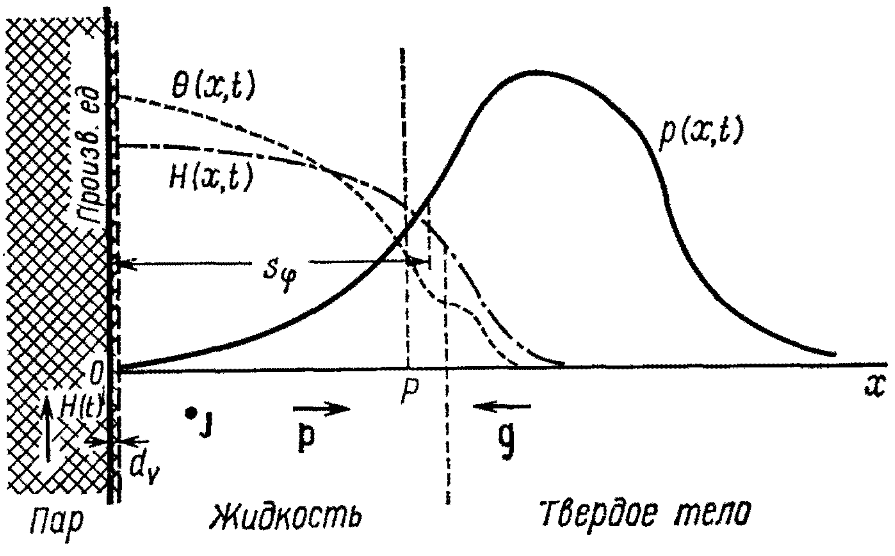
Начальные параметры приведены в подписи к фиг. 9.13. Кривые оборваны в момент, когда струи достигают оси системы. Черными кружками отмечены моменты достижения радиуса 0,4 см [9.52]. (Радиус поворота в случае без возмущений $r_t = 0,54$ см.)

быстрее, чем в линейном случае, тогда как пузыри становятся шире и развиваются более медленно (фиг. 9.12).

Тем не менее оценки, сделанные в предыдущих пунктах, подтверждаются результатами детального исследования нестабильностей Релея — Тейлора в генераторах сверхсильных магнитных полей, описанных в работе [9.52]. В этой работе использовался численный метод для решения полной системы нелинейных временны́х двумерных уравнений для сжимаемой невязкой жидкости. Типичные результаты этих расчетов приведены на фиг. 9.13 и 9.14. Они свидетельствуют о том, что нестабильности могут привести к уменьшению максимально достижимого поля, хотя это уменьшение и может быть сохранено в разумных пределах тщательным контролем начальной цилиндрической симметрии оболочки. Во всяком случае, даже несмотря на это, нестабильности исключают любые хорошо определяемые и «чистые» условия для точки поворота.

Эффекты скин-слоя

9.31. В связи с конечной проводимостью магнитное поле, проникающее в проводник, нагревает его. Из п. 5.6 известно, что



Фиг. 9.15. Взаимодействие проникающего сверхсильного магнитного поля с веществом.

когда сильное импульсное магнитное поле прикладывается к реальному сжимаемому проводнику, импульс давления, проникающий в проводящую жидкость, качественно выглядит так, как показано на фиг. 9.15, т. е. в конечном счете в виде одной или нескольких ударных волн.

Поскольку температура проводника, сжимающего магнитный поток, определяется соотношением (9.42), то температуры плавления и испарения при нормальном давлении могут быть легко достигнуты и превышены (при 10 МЭ поверхностная температура медного лайнера достигает 10^5 K) и в поверхностном слое лайнера будут проходить фазовые переходы и другие изменения его физического состояния.

Фазовый переход из твердого состояния в жидкое, который в нашем случае проходит за время порядка микросекунд, играет лишь второстепенную роль. Это обусловлено тем, что скрытая теплота плавления мала по сравнению с теплотой сублимации (см. табл. 10.V), а электропроводность в переходном режиме, вероятно, не сильно отличается от описываемой выражением (9.41).

9.32. Существенно более важен переход из жидкой фазы в пар, так как возможное вскипание поверхности может серьезно нарушить процесс сжатия потока. В этом случае необходимо учитывать различные физические процессы. Во-первых, как видно из фиг. 10.5, точка кипения сильно зависит от давления; с другой стороны, испарение должно проходить в основном вблизи поверхности, где гидродинамическое давление относительно невелико (фиг. 9.15). С этой точки зрения более важна динамика самого процесса испарения. Действительно, кипение начинается в ограниченном числе точек пространства, и скорость его развития, следовательно, ограничена скоростью подвода тепла к этим точкам. Так как процессы нагрева в экспериментах со сверхсильными магнитными полями протекают очень быстро, то несомненно, что металл будет заметно перегрет до того момента, когда станут существенными процессы кипения. Из этих соображений и из оценок скорости волны испарения, приведенных на фиг. 5.11, видно, что только очень ограниченная масса (соответствующая в большинстве случаев глубине менее 1 мм) перейдет в пар за время процесса схлопывания.

Ситуация может резко ухудшиться, если, как, например, при приближении к концу процесса кумуляции потока (см. фиг. 9.18), жидкость замедляется, т. е. подвергается действию силы тяжести g. Когда основная масса оболочки (грубо говоря, вправо от плоскости P на фиг. 9.15) будет остановлена увеличивающимся давлением поля, поверхностные слои будут стремиться продолжить свое движение (влево) через линии поля. В продольных трещинах, которые могут образоваться вследствие отрицательного давления, будет происходить сильное выкипание перегретой жидкости и затем произойдет взрыв всего скин-слоя.

9.33. Различные физические процессы, которые протекают на поверхности проводника, сжимающего магнитный поток и движущегося под действием взрыва («лайнер»), происходят, грубо говоря, в следующей последовательности.

а) *Фаза ускорения.* Когда ударная волна, образованная в лайнере детонационной волной, достигает свободной внутренней поверхности, слабо связанные частицы могут быть выброшены вперед со скоростью, немного превышающей скорость свободной поверхности. Затем они будут постепенно возвращаться на поверхность по мере того, как скорость ускоряемого лайнера будет приближаться к скорости этих частиц.

б) *Фаза сжатия.* Когда магнитное поле на поверхности схлопывающегося лайнера превысит примерно 5 МЭ, поверхность лайнера начнет выкипать. Согласно соотношению (5.51), скорость расширения образовавшегося пара приблизительно равна альфвеновской скорости, т. е. в области интересующих нас полей она по крайней мере вдвое больше скорости лайнера. Поэтому пар можно считать расширяющимся свободно, и он, безусловно, будет заполнять компрессионный объем при максимальном поле. В связи с наличием вблизи поверхности сравнительно сильных азимутальных электрических полей возможен электрический пробой в атмосфере пара, который вследствие этого преобразуется в проводящую плазму. Поэтому расширение пара поперек линий магнитного поля может быть сильно подавлено. Таким образом, в зависимости от закона изменения проводимости пара (см. [1.30] в качестве важного примера) вблизи точки поворота, где-то на расстоянии примерно от 0,1 до 1 см от металлической поверхности, будет существовать атмосфера паров металла малой плотности.

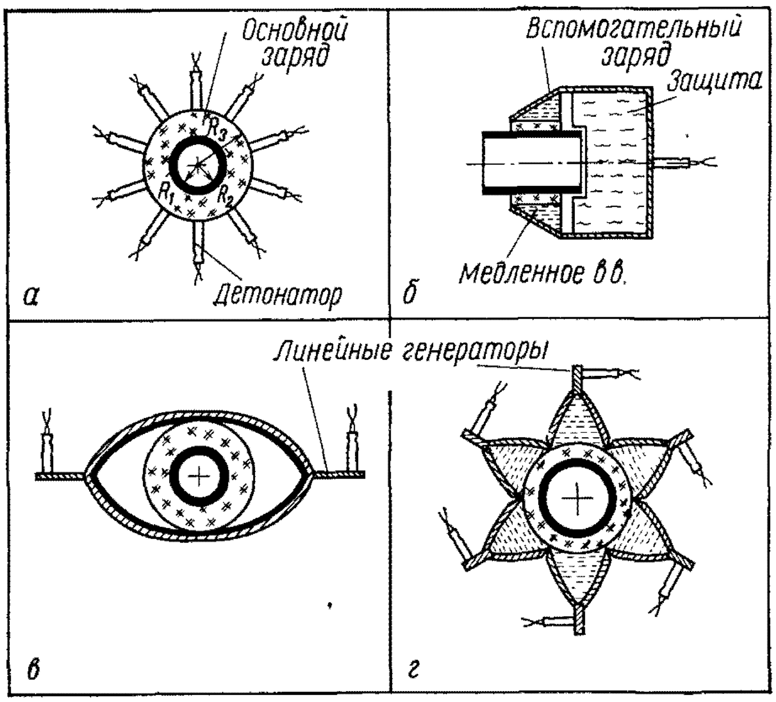
в) *Фаза замедления.* На радиусе около $2r_m$, когда основная часть лайнера начинает останавливаться за счет возрастающего магнитного давления (фиг. 9.18), ближайшие к поверхности слои стремятся продолжить движение. С одной стороны, центростремительное движение подавляется взаимодействием с полем, а с другой стороны, оно усиливается термическим взрывом (п. 9.32). Практические последствия этих эффектов, вероятно, можно наилучшим образом оценить, экстраполируя траекторию движения лайнера линейно от $2r_m$ до пересечения с осью (или датчиком). Формально можно сказать, что этот эффект усиливает нестабильности типа Релея — Тейлора (фиг. 9.13), так как приводит к дальнейшему увеличению скорости их развития.

§ 4. ГЕНЕРАТОРЫ СВЕРХСИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Ускорение лайнера взрывом

9.34. Наиболее важные эффекты, связанные с динамикой схлопывания, можно легко понять, распространив соответствующие представления и результаты, полученные для случая ускоренных взрывом пластин (пп. 8.20 и 10.28), на цилиндрическую геометрию. Как и в плоском случае, ускоренную взрывом оболочку обычно называют *лайнером*.

Технически наиболее сложной проблемой является создание сходящейся цилиндрической детонационной волны. Хотя принципиально для этих целей могут быть использованы некоторые методы, применяемые при создании плоских детонационных волн (фиг. 8.12), практически эта проблема является очень сложной (фиг. 9.16), особенно если учесть, что отклонения от среднего радиуса детонации не должны превышать $\Delta r \leqslant 0{,}1$ см.



Фиг. 9.16. Различные методы создания цилиндрической сходящейся детонационной волны.

Другие методы могут быть легко поняты при распространении способов создания плоских детонационных волн (фиг. 8.11) на цилиндрическую геометрию.

Это условие можно легко получить, рассматривая малый конечный радиус в генераторе с высокими параметрами, когда необходимо, чтобы максимальное поле создавалось в области оси генератора, где располагаются датчики или другие экспериментальные устройства. Кроме того, из требований стабильности следует, что возмущения, вносимые самим лайнером, также должны быть по возможности минимальными (фиг. 9.13).

С другой стороны, очевидно, что постоянство детонационного радиуса вдоль оси генератора не столь существенно. Действительно, сжатие потока бочкообразным повсюду коаксиальным лайнером не ограничивает максимальное локальное поле на оси. Следовательно, в ряде случаев проблема создания детонационной волны может быть решена одним из относительно простых способов, показанных на фиг. 9.16, *а* или 9.21.

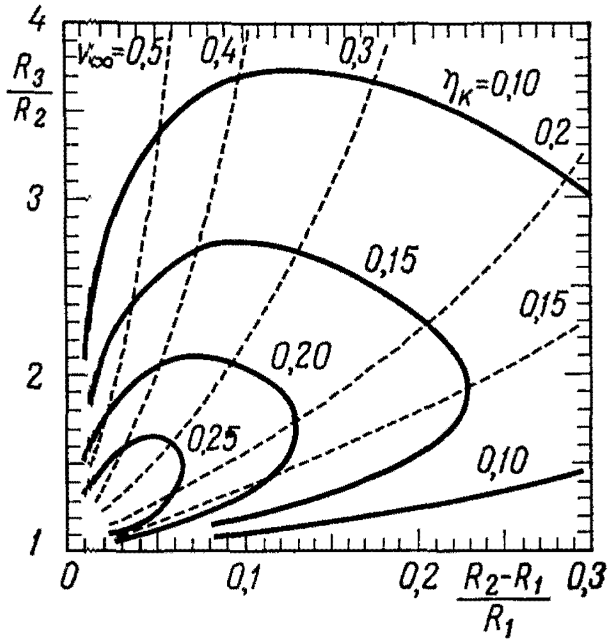
9.35. Здесь нас в основном будет интересовать кинетическая энергия, передаваемая движущемуся лайнеру детонационной волной. К основным отличиям цилиндрического случая от плоского можно отнести:

а) конечное расстояние, на котором ускоряется лайнер, т. е. отрезок от R_2 до примерно R_0, см. соотношение (9.7);

б) относительное увеличение давления, обусловленное конвергенцией продуктов взрыва в течение времени схлопывания;

в) уменьшение поверхности $(2\pi r_2)$, на которую могут воздействовать продукты взрыва.

Роль эффектов, отмеченных в пп. «б» и «в», противоположна, и ими, следовательно, в первом приближении можно пренебречь.



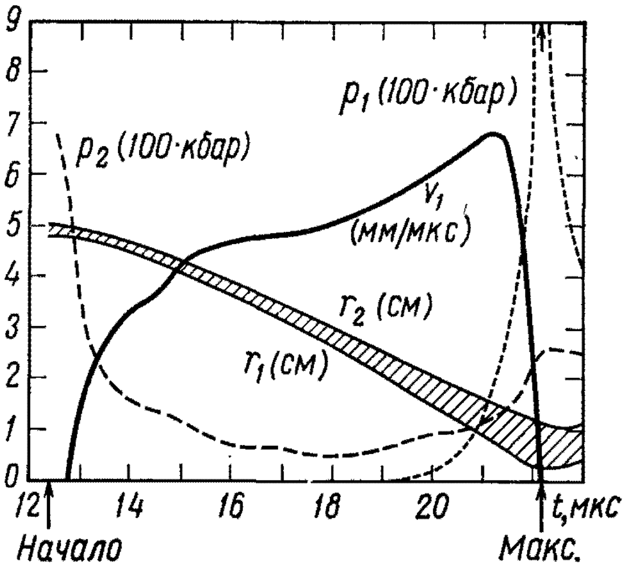
Фиг. 9.17. Эффективность преобразования η_K (отношение кинетической энергии к химической на единицу длины) и скорость центра масс v_∞ схлопывающегося лайнера в конце компрессии ($r_{2m} \approx R_0$).

Кривые получены из приближенных расчетов [1.110], в которых результаты для плоской геометрии были распространены на случай тонкого несжимаемого медного цилиндрического лайнера.

Так как начальный радиус R_2 чаще всего составляет около 5 см, а процесс ускорения происходит в основном на первых 1 . . . 2 см (фиг. 9.18 и 10.17), то не следует ожидать, что эффект, отмеченный в п. «а», играет сколь-нибудь значительную роль, т. е. существенного различия между плоским (фиг. 8.13) и цилиндрическим лайнерами нет. Из фиг. 9.17 видно, например, что эффективность передачи энергии (отношение кинетической энергии к химической на единицу длины) может достигать 25%.

Для достижения таких эффективностей передачи (во всяком случае, в средней части генератора) необходимо, конечно, чтобы потери на концах были пренебрежимо малыми. Это условие выполняется, если длина заряда примерно равна его внешнему радиусу R_3, или, в случае более коротких зарядов, если на его концах имеются тяжелые «засыпки».

До сих пор мы обычно пренебрегали процессами ускорения и все рассмотрения проводили в предположении, что лайнер, сжимающий поток, уже движется с начальной скоростью v_0 [или с соответствующей кинетической энергией (9.13)]. Такая модель требует, чтобы все процессы ускорения по существу завершались на первых 1 . . . 2 см или, во всяком случае, до того, как магнитное давление станет больше давления продуктов взрыва. Из



Фиг. 9.18. Временны́е зависимости различных величин в эксперименте по компрессии потока, полученные в [1.110] (другие случаи см. в [1.32]), с схлопывающейся цилиндрической детонационной волной и учетом ее взаимодействия с сжимаемым лайнером бесконечной проводимости.

Параметры: *взрывчатое вещество*: состав B $R_3 = 15$ см (детонация на R_3 начинается в момент $t = 0$ мкс); *лайнер*: медь, $R_2 = 5$ см, $R_1 = 4{,}8$ см (замедление начинается за 1,1 мкс до момента t_m и достигает максимума $\ddot{r}_1 = 1{,}5\cdot 10^{12}$ см/с^2 за 0,2 мкс до t_m); *магнитное поле*: $H_0 = 65$ кЭ, $H_m = 18{,}8$ МЭ (соответствует магнитному давлению 14,2 Мбар). Следует отметить, что если взять $v_0^* = 0{,}45$ см/мкс, $R_1^* = 4$ см, $H_0^* = 94$ кЭ, то из приближенных формул п. 9.20 получим $H_m = 17{,}5$ МЭ, $d_e = 0{,}09$ см, а из п. 9.15 $H_m = 15{,}5$ МЭ.

фиг. 9.18 видно, что это приближение является достаточно хорошим, хотя вследствие цилиндрической конвергенции давление продуктов взрыва остается относительно высоким в течение всего процесса схлопывания.

Взрывомагнитные генераторы

9.36. Принцип работы кумулятивных взрывомагнитных генераторов сверхсильных магнитных полей (МК-генераторы [1])) основан на следующих трех процессах:

а) Начальный магнитный поток создается во внутренней полости цилиндрического лайнера.

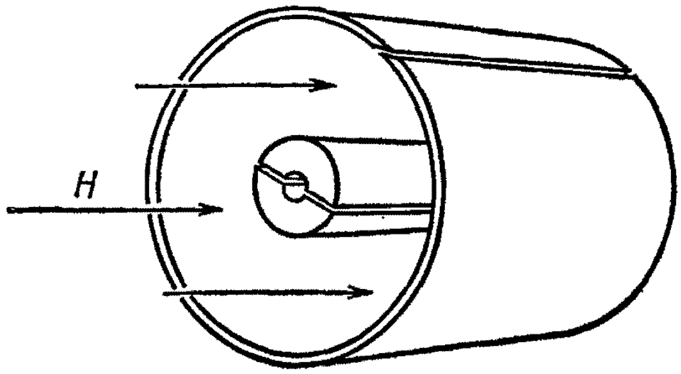
---

[1]) См. примечание на стр. 212.— *Прим. перев.*

б) Лайнер схлопывается под действием внешнего источника энергии (энергии взрыва или электромагнитной энергии).

в) Сжатие захваченного магнитного потока схлопывающимся лайнером, т. е. преобразование кинетической энергии (или ее части) в магнитную энергию.

9.37. Пункты «а» и «в» ставят в принципе два противоречивых условия: если вначале необходимо, чтобы магнитный поток легко проникал извне во внутренний объем лайнера, то после начала сжатия он не должен диффундировать из компрессионной области.



Фиг. 9.19. Лайнер с квазитангенциальной щелью, впервые использованный Фаулером и др.

Для защиты от проникающих струй в полезный объем используется «концентратор потока». (На рисунке не показана изолирующая пленка, вводимая в щель.)

Для удовлетворения этих требований в настоящее время используются два метода. Один из них заключается в создании продольной *щели* в лайнере, как это показано на фиг. 9.19; в этом случае проводник-лайнер не замкнут и введение потока в его объем не составляет проблемы. Когда детонационная волна достигает поверхности лайнера, щель очень быстро закрывается и поток полностью захватывается. Недостатки этого метода проявляются в динамике схлопывания. Действительно, щель представляет собой неоднородность в массе, приводящую к развитию нестабильности и даже выбросам, которые серьезно нарушают симметрию сжатия. Кроме того, изолирующая пленка, которая обычно вводится в щель, летит впереди лайнера и очень часто происходит прорыв продуктов взрыва (на концах заряда) через щель в компрессионный объем.

Во втором методе используется *бесшовный* лайнер, а диффузия внешнего поля достигается выбором параметров (удельного сопротивления, толщины лайнера, постоянных времени и т. д.), необходимых, чтобы обеспечить условия, определенные в пп. 4.30 и 4.31. Сжатие взрывом предполагается достаточно быстрым и обеспечивающим отсутствие каких-либо утечек потока во внешнее пространство. Это условие, конечно, выполняется по мере приближения к концу сжатия, когда лайнер всюду заметно утолщается.

Возможная потеря потока в самом начале процесса кумуляции определяется соотношением

$$\frac{d(\mu_0 H r_1^2)}{dt} = -\frac{2(H-H_0)r_1}{\sigma d}, \tag{9.72}$$

которое получается, если воспользоваться соображениями, аналогичными рассмотренным в п. 4.27, т. е. равенством индуцированного напряжения и падения напряжения, обусловленного протеканием тока по «тонкому» лайнеру конечной проводимости. Предполагая, что

а) скорость схлопывания постоянна и равна $dr_1/dt = -v_0$,

б) проводимость постоянна $\sigma = \sigma_0$,

в) лайнер геометрически тонкий, т. е. $R_1 d_0 \approx r_1 d$ (где d_0 — начальная толщина) и

г) начальное поле $H=0$ вне и $H=H_0$ внутри лайнера,

равенство (9.72) можно преобразовать в простое соотношение для магнитного потока

$$\frac{d\phi}{dr_1} = -\frac{2\phi}{R_M d_0}, \tag{9.73}$$

где число Рейнольдса R_M дается соотношением (9.40). Для потерь потока (пока лайнер остается тонким) получим

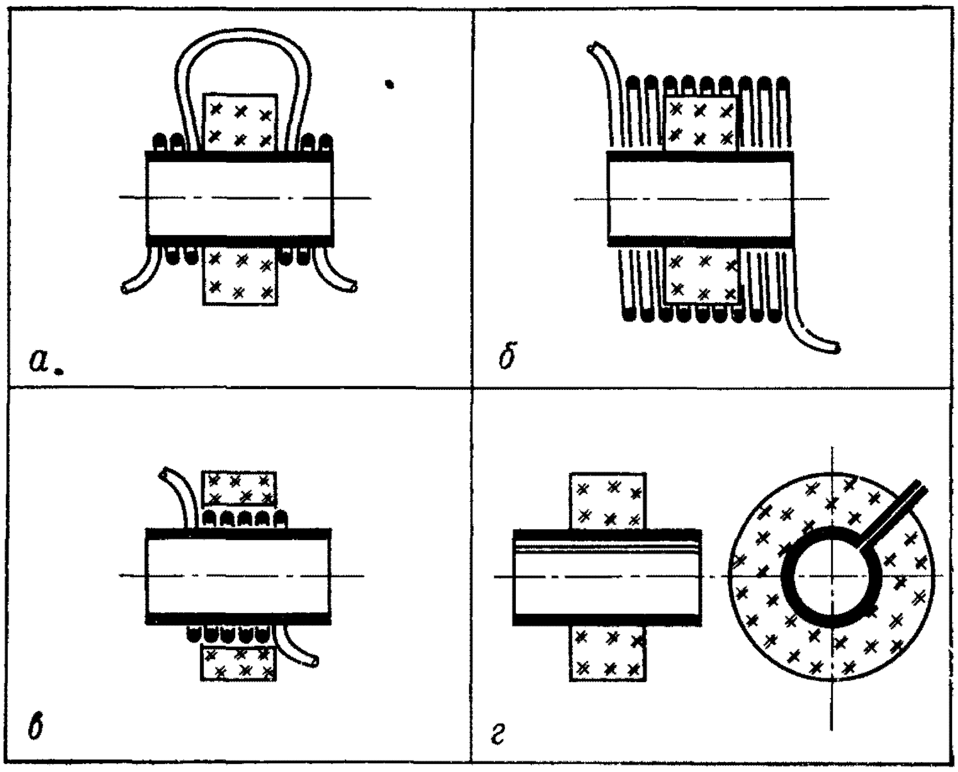
$$\frac{\phi}{\phi_0} = \exp\left\{-\frac{2}{R_M}\frac{R_1-r_1}{d_0}\right\}. \tag{9.74}$$

В качестве примера рассмотрим лайнер из нержавеющей стали (табл. 10.IV) с $R_1 = 5$ см, $d_0 = 0{,}2$ см, $v_0 = 0{,}2$ см/мкс, находящийся во внешнем синусоидальном аксиальном поле 100 кЭ с $^1/_4 T = 100$ мкс. Используя фиг. 4.13 и 4.14, получаем, что максимальное поле внутри лайнера через 150 мкс будет равно 70 кЭ, а из соотношения (9.74) $\phi/\phi_0 \approx 0{,}89$, когда $(R-r)/d_0 = 10$ ($R_M = 170$). Заметим, что в действительности внешнее поле присутствует в течение всего времени сжатия, так что ϕ/ϕ_0 будет даже несколько больше.

9.38. Основные практические трудности, связанные с использованием этого метода, обусловлены тем, что создающая начальный магнитный поток катушка в таких генераторах должна находиться там же, где располагается взрывчатка, т. е. вблизи области, где происходят ускорение лайнера продуктами взрыва и процесс компрессии магнитного потока (фиг. 9.20). Наилучшим вариантом является тот, схема которого приведена на фиг. 9.20, *в*, однако очевидно, что такая геометрия расположения катушки может привести к возмущениям в движении лайнера. Были испытаны также и другие варианты; все они имеют свои достоинства и недостатки (см. также фиг. 9.26).

Использование конденсаторной батареи для питания катушек, создающих начальный магнитный поток, имеет много преимуществ, хотя это и не означает, что такой способ является единственно возможным (см. п. 9.44). Основным преимуществом использования конденсаторной батареи является относительно короткое время нарастания тока, что позволяет использовать катушку, удерживаемую только инерционными силами (см. п. 5.11). Это существенно упрощает конструкцию катушки и, следовательно, снижает ее стоимость. Все электромагнитные и механические проблемы, связанные с созданием начального магнитного потока, обсуждались в гл. 6 и 7.

9.39. Существующую ситуацию в области экспериментов по генерированию сверхсильных магнитных полей до сих пор еще можно расценивать как начальную стадию развития, хотя прошло уже



Фиг. 9.20. Различные конструкции катушек взрывомагнитных систем.

более 10 лет с того момента, когда Фаулер и др. впервые опубликовали результаты своей работы. Эти результаты, как видно из табл. 9.II, плохо воспроизводимы и имеют большой разброс. Хотя Сахаров и др. сообщили о генерации полей, превышающих 25 МЭ, по-видимому, разумнее было бы считать, что сообщаемые до 1969 г. значения воспроизводимых полей, как отмечалось в п. 1.4, лежат где-то между 6 и 10 МЭ, причем, вероятно, ближе к первому значению, чем ко второму (фиг. 9.21—9.23). Во всяком случае, поля, которые использовались при проведении физических исследований, исключая простые измерения с индуктивными датчиками [в ча-

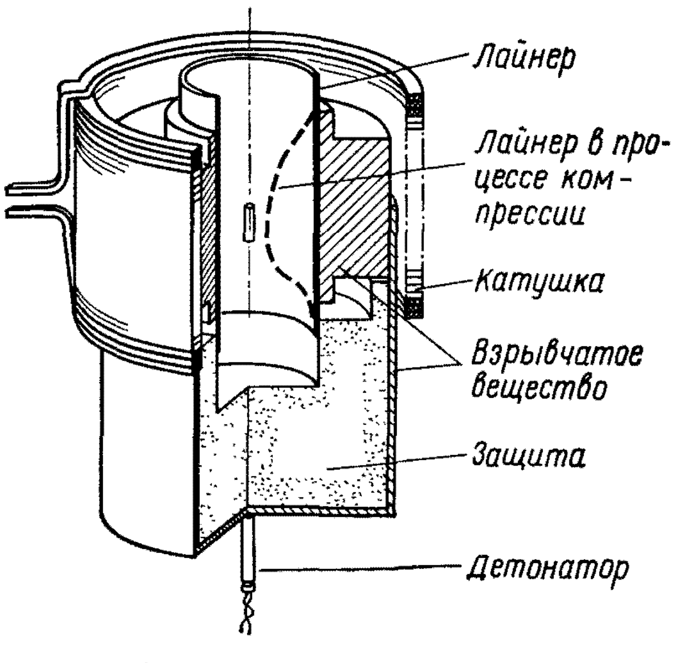
ТАБЛИЦА 9.II

Взрывные генераторы сверхсильных магнитных полей

Лаборатория	Год	Взрывчатое вещество			
		тип	система подрыва	длина, см	R_3, см
Лос-Аламос	1960	Состав В	Фиг. 9.16, *а*, 22 дет.	7,6	10,2
	1966	Состав В	Фиг. 9.16, *а*, 25 дет.	7,6	11,8
Москва [5]	1966 [6]	—	Фиг. 9.16, *а* или 9,16, *г*	—	33
	1966	—	Фиг. 9.16, *а* или 9,16, *г*	—	~30
Фулнес	1967	Состав В	Фиг. 9.16, *а*, 2 кольца из 60 дет.	10	15
Лимейл	1967	$v_\Delta = 0{,}81$ см/мкс, $\rho = 1{,}7$ г/см^3	Фиг. 9.16, *г*, 4 линзы	5	10
Фраскати	1967	СР 8	Фиг. 9.21	8	7

1) Латунные и медные лайнеры — со щелью (фиг. 9.19); лайнер из нержавеющей стали — бесшовный.
2) Катушка находилась внутри лайнера.
3) Начальное поле создавалось спиральным генератором.
4) Было получено один раз или дважды.

стности эффектов Зеемана, Фарадея [1.156, 1.52] и измерения температурной зависимости коэффициентов диффузии магнитного поля (см. фиг. 4.7)], лежали ниже 5 МЭ.



Ф и г. 9.21. Заряд типа 45, используемый группой во Фраскати (Италия для создания полей в диапазоне 5—6 МЭ (диаметр лайнера $2R_1$ = 7,7 см).

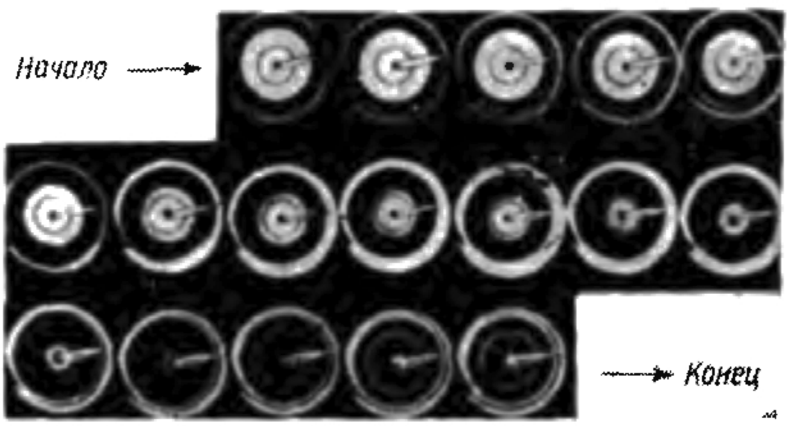
Лайнер			Начальное поле			Максимальные величины		Литература
R_2, см	R_1, см	металл [1])	тип катушки	энергия в батарее W_{CB}, кДж	H_0, кЭ	H_m, МЭ	r_m, см	
3,81	3,49	Латунь	Фиг. 9.20, *в* [2])	30	90	14 [4])	~ 0,25	[9.2]
5,4	5,24	Нерж. сталь	Фиг. 9.20, *а*	300	30	5—6	~ 0,13	[1.33]
—	—	» » (+20 мкм Cu)	Фиг. 9.20, *в*	Конд. батарея	—	24 [4])	~ 0,2	[8.6, 8.5, 1.27]
—	15	Медь	Фиг. 9.20, *а*	[3])	~ 60	5	~ 1,5	[8.5]
5,3	5	»	Фиг. 9.20, *в*	—	80	3,5—5	—	[9.7, 9.8]
4,25	4,1	Нерж. сталь	Фиг. 9.20, *а*	200	50	5—7	~ 0,25	[1.29, 1.64]
3,95	3,85	» »	Фиг. 9.21	200	65	5—6	~ 0,25	[1.35, 1.75]

5) Большинство значений оценочные.

6) *Первые эксперименты по получению сверхсильных магнитных полей методом* компрессии магнитного потока в СССР были проведены в 1951 г. [*Сахаров А. Д.*, УФН, 88,725 (1966)].—*Прим. перев.*

Можно предложить два основных объяснения этого:

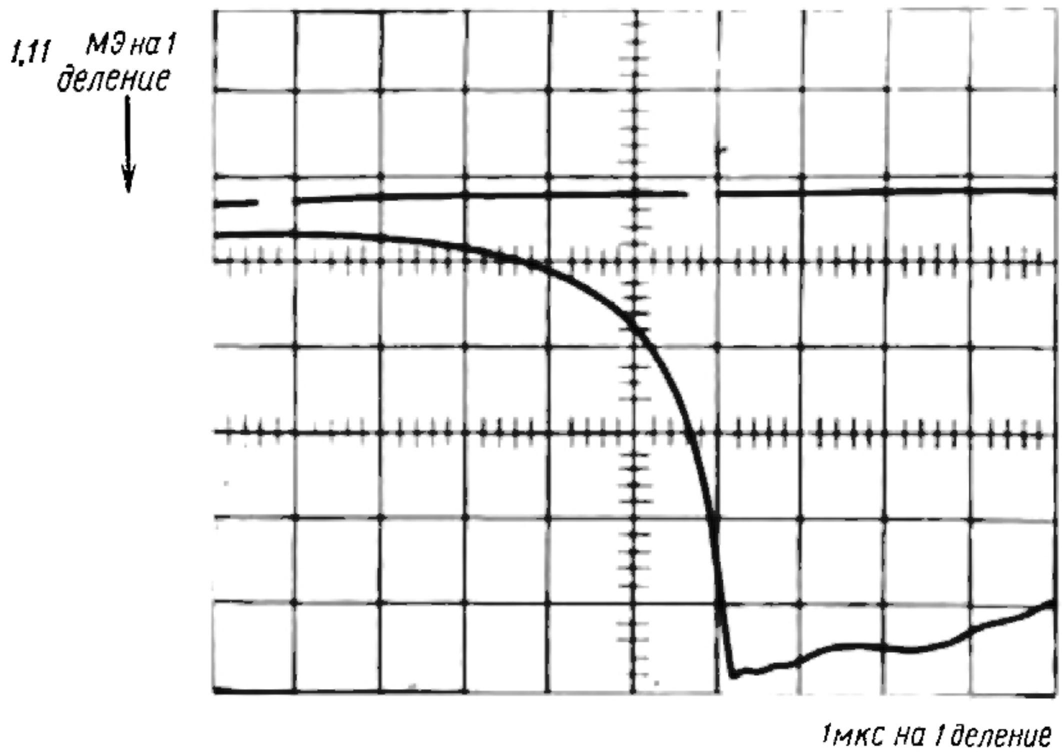
а) Проведение физических экспериментов требует создания полей, воспроизводимых в области 6 — 10 МЭ и выше, а эти эксперименты очень сложны и дороги (см. п. 9.44). Поэтому их статистика очень низка.



Фиг. 9.22. Покадровая съемка процесса схлопывания лайнера из нержавеющей стали с $R_1 = 3{,}65$ см, $R_2 = 3{,}75$ см.

Конструкция использованной системы аналогична приведенной на фиг. 9.21, но с меньшим зарядом ($R_3 = 4{,}9$ см). Временной интервал между кадрами 1 мкс, диаметр маркерного кольца 3 см.

б) Часто наиболее совершенная техника и соответствующие экспериментальные результаты засекречиваются ввиду возмож-



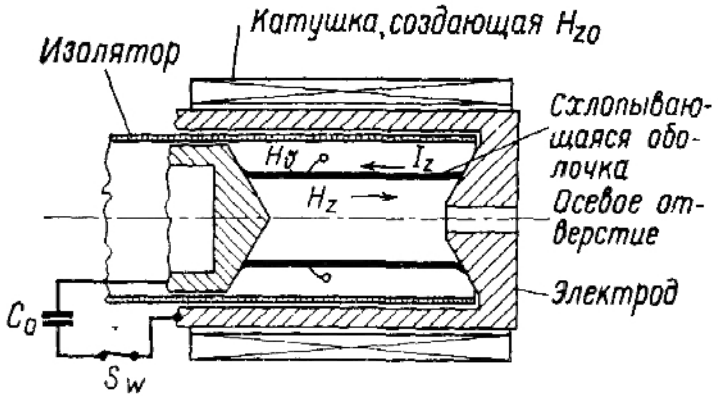
Фиг. 9.23. Осциллограмма магнитного поля, полученная с системой типа 45. Максимальное поле $H_m = 6 \pm 0{,}5$ МЭ в области диаметром $r_m \approx 0{,}25$ см. Полное время компрессии $t_m = 11$ мкс.

ности их военного применения. Следовательно, обмен информацией сильно затруднен, а критическая оценка полученных результатов фактически невозможна.

Генераторы с лайнером, разгоняемым электродинамическими силами

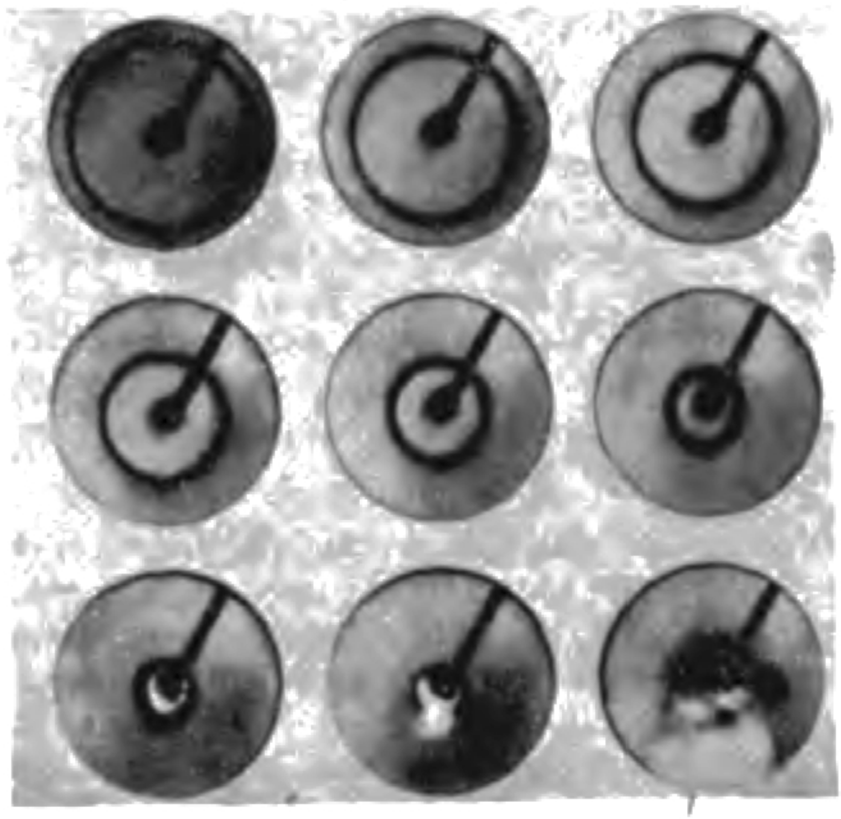
9.40. Динамика подрываемой электрическим током оболочки обсуждалась в гл. 5. В частности, в п. 5.31 было показано, что, когда в качестве источника используется конденсаторная батарея, основное уравнение цепи (5.75) совместно с уравнением движения (5.72) должны решаться численно. Тем не менее возможно произвести некоторые существенные упрощения (см., например, пп. 5.33 и 5.34).

Метод создания сверхсильных магнитных полей в генераторах, в которых компрессия потока осуществляется лайнером, разгоняемым за счет протекающего по нему тока, необходимо сравнить, с одной стороны, с обычным методом разряда конденсаторной батареи через соленоид (гл. 7) и, с другой стороны, с магнитокумулятивными системами, обсуждавшимися в предыдущем разделе. В ряде случаев (которые будут обсуждаться в двух следующих пунктах) метод электромагнитных генераторов может иметь некоторые преимущества по сравнению с двумя рассмотренными ранее методами.



Фиг. 9.24. Компрессия потока оболочкой, разогнанной электромагнитным полем (z -геометрия).

Выбор ϑ- или z-геометрии системы сжатия в основном зависит от экспериментальных требований. В то время как первая система



Фиг. 9.25. Покадровая съемка процесса схлопывания лайнера, разгоняемого электромагнитным полем.

Размеры алюминиевого лайнера: $R_1 = 2{,}5$ см, $d = 0{,}04$ см, его радиус на первом кадре $r_1 \approx 2$ см. Остальные параметры этого эксперимента аналогичны параметрам эксперимента, описанного в [9.4, 9.22] (табл. 9.III).

(см. также фиг. 5.13) обеспечивает более легкий доступ к объему с высоким полем, вторая (фиг. 9.24), как уже отмечалось в п. 5.34, имеет лучший коэффициент преобразования.

Как и во взрывном варианте, в этом случае в основном возможно разделить процессы схлопывания и сжатия магнитного потока (фиг. 9.25), поэтому численные расчеты всех процессов относительно просты. Различные авторы приводят обобщенные результаты, в которых численно определены оптимизированные критерии, выраженные в безразмерных параметрах [9.4, 9.5, 9.19, 9.18, 5.13]. Основные результаты этих расчетов заключаются в том, что источник энергии (конденсаторная батарея) разряжается примерно на 80%, когда оболочка достигает половины или одной четверти начального радиуса в ϑ- и z-геометрии соответственно.

9.41. Из п. 7.20 известно, что проблема создания магнитных полей свыше 1—2 МЭ в обычном одновитковом соленоиде требует источника энергии (конденсаторной батареи), разряд которого протекал бы быстрее чем за 5 мкс. Электромагнитная компрессионная система позволяет приспособить относительно «медленный» источник энергии в качестве силовой установки для генерации сверхсильных полей, которая при этом, следовательно, работает как трансформатор мощности. Действительно, преобразование запасенной электромагнитной энергии в кинетическую энергию схлопывающегося лайнера происходит в течение времени, которое может быть на один-два порядка больше времени, требуемого для создания сверхсильного магнитного поля.

Экспериментальные данные, приведенные в табл. 9.III, четко демонстрируют преимущества этого метода «трансформации мощности». Действительно, поскольку использовавшиеся в обоих экспериментах, результаты которых приведены в таблице, разрядные цепи были относительно «медленными», было бы невозможно создать такие сверхсильные поля в системе с простым одновитковым соленоидом.

9.42. Ускорение до очень высоких скоростей — один из наиболее интересных аспектов метода электромагнитного разгона. В п. 9.20 было, в частности, показано, что максимально достижимые магнитные поля пропорциональны скорости схлопывающейся оболочки. Таким образом, любой метод, позволяющий ускорить твердый проводник до скоростей, превышающих скорости, достигаемые при использовании взрывного метода (с известными мощными взрывчатыми веществами достигаются скорости около 0,5 см/мкс, см. фиг. 9.17 и 9.18), является фундаментальным для дальнейшего развития генераторов сверхсильных магнитных полей. Максимальные скорости, которые могут быть получены в случае «тонких» пластинок, разгоняемых магнитным полем, приведены в табл. 5.II; они примерно на порядок выше, чем скорости лайнера, ускоренного взрывом. Для схлопывающейся цилиндрической оболочки, толщина которой возрастает в процессе ускорения, можно

ТАБЛИЦА 9.III

Компрессия магнитного поля в системе, работающей от конденсаторной батареи

	Единицы	Данные работы [9.4, 9.22], ϑ-геометрия	Данные работы [9.18], z-геометрия
Источник энергии			
Энергия батареи W_{CB}	кДж	136	570
Зарядное напряжение U_0	кВ	20	4,8
Максимальный ток I_m	МА	0,64	4,9
Время разряда ($^1/_4\ T_0$) (из начальных значений C и L)	мкс	25	40
Начальные условия			
Материал оболочки		Al	Cu
Радиус оболочки R_1	см	3,95	3
Толщина оболочки d_0	см	0,08	0,2
Длина оболочки l_0	см	2	15
Начальное поле H_0	кЭ	~ 25	35
Результаты			
Максимальная скорость схлопывания (вблизи r_m)	см/мкс	0,17	0,13
Скорость схлопывания при $r_1/R_1 = 0,5$	см/мкс	0,15	0,07
Полное время схлопывания t_1	мкс	33	63
Максимальное измеренное поле H_m	МЭ	1,1	2,8
Соответствующий радиус r_m	см	0,3	0,33

ожидать даже несколько больших значений скорости по сравнению с приведенными в табл. 5.II, так как а) толстый лайнер ускоряется дольше, чем тонкий (п. 5.21), и б) металл может перейти в сильно перегретое состояние до того, как он полностью испарится (т. е. интеграл тока J станет больше).

В действительности, однако, интересующие нас скорости могут быть достигнуты только в экстремальных экспериментальных условиях. Рассмотрим в качестве примера z-систему, питаемую от МК-генератора со взрывными ключами, генерирующего близкий к плоскому импульс тока с $I_c = 16$ МА (см. табл. 8.I). Лайнер выполняется в виде алюминиевой трубы радиусом $R_1 = 3$ см и толщиной $d_0 = 0,05$ см. Скорость схлопывания на половине радиуса ($r_1 = 0,5R_1$) в этой системе, согласно равенству (5.77), достигает 0,6 см/мкс, а максимальная скорость [см. (5.79)] равна 1,8 см/мкс. Эти величины должны быть сравнимы со скоростью, определяемой термическим пределом (табл. 5.II), $v_{lb} = 0{,}7$ см/мкс, которая, однако, для цилиндрической геометрии ожидается несколько большей.

Прогнозы

9.43. Из расчетов и результатов, рассмотренных ранее, можно ожидать, что задача создания магнитных полей порядка 10 МЭ и более связана с огромными экспериментальными и технологическими трудностями. Для иллюстрации этих трудностей в табл. 9.IV

ТАБЛИЦА 9.IV

Параметры генератора сверхсильного магнитного поля[1])

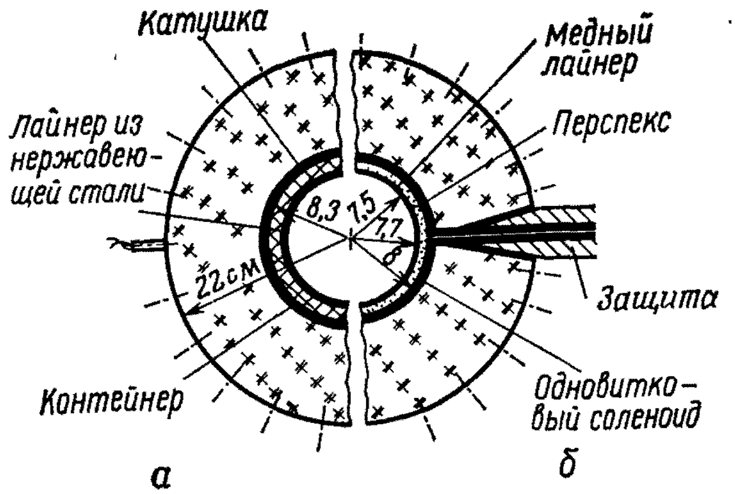
Требуемые значения	
а) Максимальное поле	$H_m = 11$ МЭ
б) Соответствующий радиус	$r_m = 0{,}5$ см
Принятые значения	
в) Начальный радиус лайнера (внутренний)	$R_1 = 7{,}5$ см
г) Начальный радиус лайнера (внешний)	$R_2 = 8$ см
д) Максимальный коэффициент сжатия потока (из табл. 9.I)	$\lambda_m = 0{,}4$
е) Относительная магнитная энергия в области πr_m^2 (из табл. 9.I)	$W_{M_m}/W_{K_0} = 0{,}25$
Необходимые начальные значения	
ж) Начальное поле (из значений «а», «б», «в», «д»)	$H_0 = 120$ кЭ
з) Начальная кинетическая энергия (из значений «а», «б», «е»)	$W_{K_0} = 1{,}5$ МДж/см
и) Внешний радиус заряда взрывчатого вещества (из табл. 10.III, фиг. 9.18 и величины «з»)	$R_3 = 22$ см

[1]) Более точные оценки могут быть сделаны, если воспользоваться результатами, приведенными на фиг. 9.4, 9.6, 9.17 аналогично случаю «ж» в табл. 9.I.

перечислены параметры, определенные для магнитокумулятивного генератора, способного создать поле 10—12 МЭ в области диаметром около 1 см. Конечный радиус $r_m = 0{,}5$ см необходим, чтобы обеспечить получение требуемых полей воспроизводимым образом (согласно определению, данному в п. 1.4). Этот размер позволяет, например, принять, что рабочая область может иметь диаметр 0,4 см, так как ее необходимо защитить от паров металла и струй малой плотности непроводящей трубкой с толщиной стенки 0,2 см, и, кроме того, можно предположить разъюстировку в 0,1 см между осью кумуляции и осью всего устройства.

9.44. Если параметры используемого заряда взрывчатого вещества определены данными, приведенными в табл. 9.IV, то остается проблема выбора типа лайнера и устройства катушки, создающей начальное поле. Можно предложить два решения (фиг. 9.26).

В первом (фиг. 9.26, *а*) варианте, предложенном в работах [8.5, 8.6, 1.27] (табл. 9.II), используется бесшовный лайнер из нержавеющей стали (толщина стенки 0,2 см), электролитически покрытый слоем меди толщиной около 0,01 см; в конце процесса компрессии толщина этого медного слоя составляет 0,12 см, т. е. того же порядка, что и толщина скин-слоя. Магнитная катушка (типа



Фиг. 9.26. Генератор сверхсильного магнитного поля в диапазоне 10...15 МЭ (см. табл. 9.IV).

Начальное поле создается катушкой одной из двух (*а*, *б*) обсуждаемых в тексте конструкций.

«рулета» из алюминиевой фольги толщиной 0,01 см и изолирующей пленки, свернутой в трубку из 10 слоев) помещается непосредственно на лайнер и (частично) заворачивается в фольгу из нержавеющей стали толщиной 0,2—0,3 см. Можно в качестве упаковки использовать также стеклопластик, пропитанный эпоксидной смолой, поскольку этот непроводящий материал имеет близкий к нержавеющей стали предел прочности ($\Sigma_y \approx 25$ — —$30 \cdot 10^7$ Н/м^2, см. также табл. 5.I). Решения всех проблем, связанных с созданием начального поля, включая и диффузию потока через лайнер, рассмотрены в гл. 4 и 5. Практически для источника энергии, питающего катушку, необходимо иметь время разряда 300—500 мкс и запасенную энергию 500—800 кДж. (Энергия магнитного поля в катушке длиной 25 см составляет около 350 кДж, остальное рассеивается в лайнере, см. фиг. 4.15.)

Во втором варианте (фиг. 9.26, *б*) используется катушка, устройство которой показано на фиг. 9.20, *г*, но сжатие потока производится отдельным разрезным лайнером. В этом случае создание начального поля существенно упрощается. Питание катушки может быть легко осуществлено от одного из перечисленных в табл. 8.I МК-генераторов. Чтобы обойти необходимость использования разрезного лайнера и, следовательно, исключить серьезные неоднородности в симметрии схлопывания, нужно ввести начальную магнитную энергию (в данном случае около 0,5 МДж) за время менее 10—20 мкс. Необходимые системы коммутации, описанные в п. 8.26, могут быть объединены с генератором.

Для подрыва большого кольцевого заряда предлагается использовать два кольца детонаторов с расстоянием между ними менее 8 см и расстоянием между отдельными детонаторами в кольце не более 5 см. Одновременный подрыв по крайней мере 60 детонаторов, имеющихся в таком устройстве, представляется трудной технической задачей (п. 10.29). Для ограничения аксиальных потерь давления требуемая длина заряда должна быть равна 20 см, так что полный вес заряда взрывчатого вещества составит около 45 кг. Полная стоимость этого устройства достигает пяти — десяти тысяч долларов.

9.45. Исходя из параметров установленных экспериментально для поля 10 МЭ (эксперимент, параметры которого приведены в табл. 9.IV), можно рискнуть провести аппроксимацию в область полей 15 МЭ, изменяя свободные параметры, в частности уменьшая конечный радиус до минимума, скажем 0,25 см.

И наконец, возможность создания генераторов еще более высоких полей (от 20 МЭ и выше) определяется в основном гидродинамическими условиями, изложенными в п. 9.20. Практически для этого требуются скорости схлопывания свыше 1 см/мкс на радиусе, равном половине начального, т. е. такие значения скорости, достижение которых едва ли возможно с помощью обычных мощных взрывчатых веществ. До тех пор пока не будут разработаны новые, более мощные химические взрывчатые вещества, единственным путем решения этой проблемы является использование либо разгоняемой магнитным полем оболочки, либо ядерной взрывчатки, либо комбинации и того, и другого.

Десятая глава Проводимость металлов при высоких плотностях энергии

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

10.1. Взаимодействие сверхсильных магнитных полей с металлическими проводниками может привести к увеличению внутренней энергии последних до значений, существенно превышающих химическую энергию связи в твердых телах. Очевидно, что при таких уровнях энергии свойства металлов (поведение атомов и ионов в решетке), а также и транспортные свойства электронов могут существенно отличаться от тех, которые имеют место при нормальных условиях, т. е. при комнатной температуре и атмосферном давлении.

В этой главе собраны некоторые наиболее важные данные для металлических проводников при давлениях и температурах выше нормальных. Разбор этого материала будет сопровождаться обсуждением наиболее важных физических эффектов, особенно электропроводности и высоких динамических давлений.

Несколько пунктов главы посвящено проблеме использования химических взрывчатых веществ в научных целях. В основном будет рассмотрено взаимодействие детонационной волны с металлическими проводниками и вопросы преобразования химической энергии взрыва в кинетическую энергию ускоряемого лайнера. Эта проблема, как показано в предыдущей главе, играет фундаментальную роль в генераторах сверхсильных магнитных полей и в более общем смысле в физике энергий высоких плотностей.

Простая модель металла

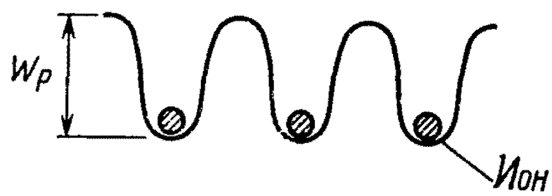
10.2. В интересующем нас интервале давлений и температур, т. е. от комнатной температуры и атмосферного давления до десятков тысяч градусов Кельвина и многих мегабар, для металлического проводника можно принять наиболее простую модель твердого тела, т. е. решетку из регулярно расположенных ионов, с которой связан газ из «свободных» электронов.

Для наших целей удобно характеризовать ионы решетки следующим образом:

а) каждый ион в положении равновесия имеет (отрицательную) потенциальную энергию W_p (фиг. 10.1);

б) каждый ион может совершать гармонические колебания относительно своего положения равновесия (т. е. задана глубина потенциальной ямы) с частотой ν.

Относительно п. «а» следует отметить, что высота потенциального барьера W_p составляет обычно 50—70% от средней энергии связи W_B для каждого иона и достигает примерно нескольких электронвольт (табл. 10.II).



Ф и г. 10.1. Периодический **потенциал** решетки.

10.3. Расчет термодинамических свойств металла зависит от используемой функции распределения частот собственных колебаний $f(\nu)$ для N осцилляторов в решетке. Например, *в модели Эйнштейна*, в которой используемый спектр наиболее прост, предполагается, что все колебания имеют одинаковую частоту ν_0. В своей наиболее плодотворной модели *Дебай* предположил, что

$$f_D(\nu)\begin{cases}\sim V\nu^2, & \nu<\nu_D,\\ =0, & \nu>\nu_D,\end{cases} \tag{10.1}$$

где $V=1/\rho$ — удельный объем. а максимальная частота ν_D определяется из условия, что полное число типов колебаний должно быть равно числу степеней свободы $3N$, т. е.

$$\int_0^{\nu_D} f_D\,d\nu = 3N. \tag{10.2}$$

Очень часто граничная частота характеризуется *дебаевской температурой* Θ_D, которая определяется из соотношения

$$k\Theta_D = h\nu_D, \tag{10.3}$$

где k и h — соответственно постоянные Больцмана и Планка. В интересующей нас области, характеризующейся температурой больше Θ_D, различия, обусловленные разными моделями, пренебрежимо малы, и приближение осциллятора с одной средней (постоянной) частотой $\langle\nu\rangle$ в полне удовлетворительно.

10.4. В случае гармонических колебаний движение иона с массой m_i в поле возвращающей силы $-bx$ описывается уравнением

$$m_i \frac{dx^2}{dt^2} = -bx, \tag{10.3}$$

а частота колебаний ν определяется соотношением

$$\nu = \sqrt{\frac{b}{4\pi^2 m_i}}. \tag{10.4}$$

Согласно классической статистике, средняя энергия каждой из трех степеней свободы в условиях термодинамического равновесия равна

$$W_M = k\Theta, \tag{10.5}$$

так как среднее значение и потенциальной, и кинетической энергии равно $^1/_2\, k\Theta$. (Здесь и далее во всей главе Θ — абсолютная температура в градусах Кельвина.) Для среднеквадратичного отклонения в данном направлении $\langle x^2 \rangle$, следовательно, имеем

$$\frac{1}{2} b \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k\Theta. \tag{10.6}$$

10.5. Колебания можно считать гармоническими до тех пор, пока их амплитуда намного меньше межатомных расстояний, т. е. до тех пор пока энергия колебаний (10.5) существенно меньше потенциальной энергии W_p. При увеличении температуры решетки, когда величина $k\Theta$ приближается к W_p, колебания становятся ангармоничными и, наконец, для $k\Theta > W_p$ атомы легко переходят из своих первоначальных состояний в вакантные состояния или в конечном счете в межузловое пространство. При достаточно высоких температурах атомы движутся в теле практически совершенно свободно. Это означает, что энергия, соответствующая каждой из трех поступательных степеней свободы, равна

$$W_N = \frac{1}{2} k\Theta. \tag{10.7}$$

10.6. Наша упрощенная модель металла усложняется, если учесть «свободный» электронный газ в решетке из положительно заряженных ионов. Взаимодействие электронов с ионами в основном определяется потенциальным полем, обусловленным решеткой (модели Зоммерфельда или Блоха). Взаимодействие между электронами описывается на основе статистики Ферми — Дирака. Не вдаваясь в детали, просто напомним для удобства последующего рассмотрения, что электронный газ является вырожденным, когда его температура намного меньше *температуры Ферми*

$$\Theta_F = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e k} n_e^{2/3}, \tag{10.8}$$

т. е.

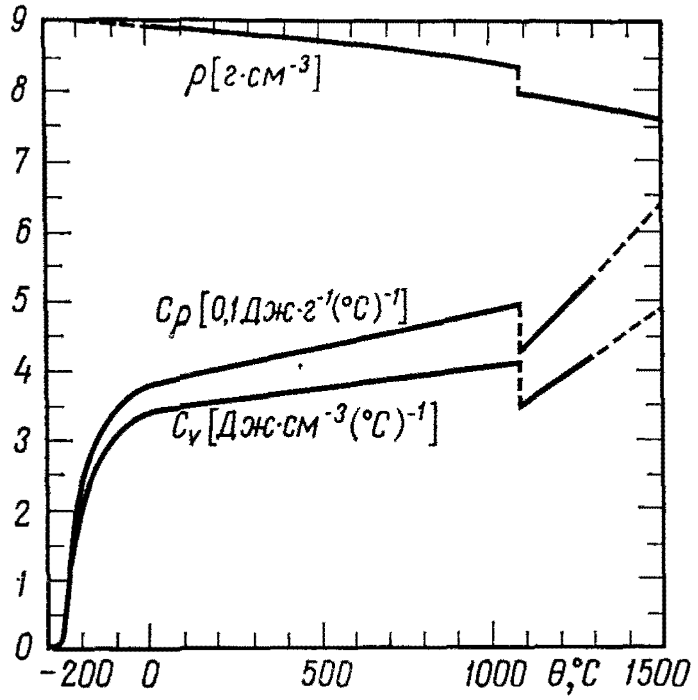
$$\Theta_F = 4{,}35 \cdot 10^{-11} n_e^{2/3} \text{ (см}^{-3}\text{, К)}, \qquad (10.9)$$

и что *средняя энергия Ферми* на электрон определяется [10.17] как

$$\langle W_F \rangle = \frac{3}{5} k\Theta_F. \qquad (10.10)$$

Теплоемкость

10.7. Если считать, что металл состоит из N одинаковых атомов (в единице массы), колеблющихся в $3N$ независимых направле-



Фиг. 10.2. Различные параметры для чистой меди в зависимости от температуры θ, измеренные в квазистатических условиях.

Значения c_ρ, измеренные в интервале температур 0—1083 °C, взяты из работы [10.8] Значения c_ρ при $\Theta > 1083$ °C и ρ — из [10.7].

ниях, то, используя соотношение (10.5), для удельной теплоемкости (единицы массы) можно написать

$$c_\rho = 3Nk. \qquad (10.11)$$

Это выражение справедливо только для $\Theta \gg \Theta_D$. При более низких температурах необходимо учитывать частотный спектр колебаний (п. 10.2). Например, используя распределение Дебая (10.1), для теплоемкости при низких температурах ($\Theta \ll \Theta_D$) получим известное выражение $c_\rho \sim (\Theta/\Theta_D)^3$.

По мере того как тепловая энергия ионов становится больше критической энергии связи, теплоемкость изменяется до значений, соответствующих одноатомному газу, которая, согласно (10.7), равна

$$c_\rho \approx \frac{3}{2} Nk. \tag{10.12}$$

Переход от колебательного к поступательному движению атомов и соответствующее этому уменьшение теплоемкости от значений, определяемых (10.11) до (10.12), происходит, конечно, постепенно и зависит от давления. Величина различных поправок, обусловленных вкладом электронов в теплоемкость, относительно мала и рассмотрена в [10.17].

10.8. В табл. 10.IV приведены средние значения теплоемкости различных металлов. В действительности теплоемкость изменяется с температурой даже в относительно небольшом рассматриваемом нами температурном интервале от 0 до 1000 °С (фиг. 10.2). Тем не менее для большинства металлов в твердом состоянии величина c_ρ изменяется в пределах $\pm 10\%$ от своего среднего значения. Заметим, что, согласно нашему определению, $c_v = \rho c_\rho$, где обе теплоемкости, как для единичного объема (c_v), так и для единичной массы (c_ρ) являются «теплоемкостями при постоянном объеме».

§ 2. ВЫСОКИЕ ДАВЛЕНИЯ

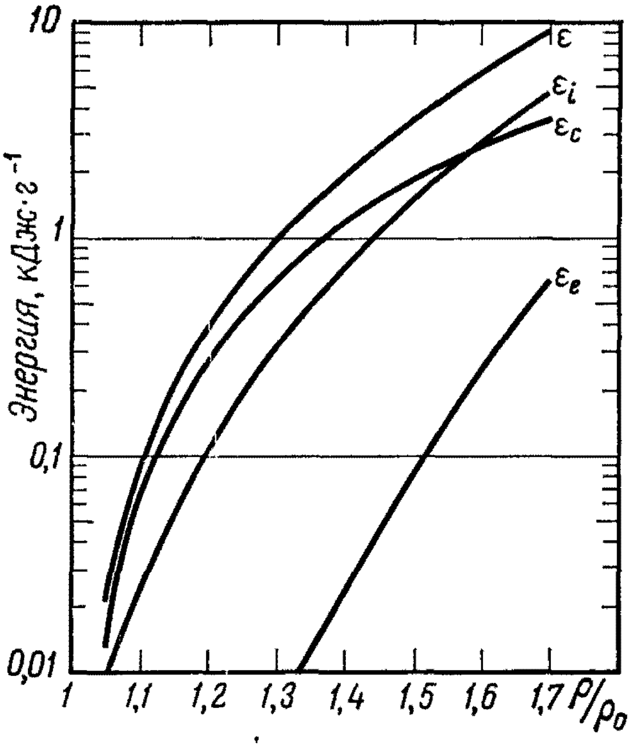
Уравнение состояния

10.9. В интересующей нас области температур и давлений (порядка 1 Мбар и 10 000 К) металлический проводник можно рассматривать как изотропное конденсированное образование, термодинамическое состояние которого, следовательно, определяется тремя независимыми переменными, например удельным объемом $V = 1/\rho$, давлением p и температурой Θ (в градусах Кельвина). Число независимых переменных может быть уменьшено до двух, если ввести *уравнение состояния*, т. е. соотношение между самими переменными и/или соответствующими термодинамическими функциями, такими, как внутренняя энергия ε или энтальпия (тепловая функция) $h = QV = \varepsilon + pV$. Уравнение состояния может быть записано, например, в виде $\varepsilon = \varepsilon(p, V)$ или $p = p(V, \Theta)$.

10.10. Из экспериментальных результатов и общих физических соображений следует, что плотность энергии (на единицу массы) в металлах можно представить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_c(V) + \varepsilon_i(V, \Theta) + \varepsilon_e(V, \Theta), \tag{10.13}$$

где ε_c — потенциальная энергия твердого тела при абсолютном нуле температуры; ε_i — тепловая энергия, связанная с колебаниями атомной решетки; ε_e — член, описывающий тепловое возбуждение электронов (фиг. 10.3).



Фиг. 10.3. Плотность в меди при ударном сжатии.

ε_c — вклад от решетки (холодное сжатие); ε_i и ε_e — тепловые вклады от ионов и электронов. (Кривые построены по данным, приведенным в [10.57].)

10.11. Теоретические значения для двух тепловых членов выражения (10.13) могут быть получены относительно легко. Как было отмечено в п. 10.7, вклад атомов во внутреннюю энергию можно представить в виде

$$\varepsilon_i = c_\rho (\Theta - \Theta_0) + \varepsilon_{i0}, \tag{10.14}$$

где ε_{i0} — доля тепловой энергии, соответствующая температурному интервалу от абсолютного нуля до Θ_0 (см. табл. 10.I, где $\Theta_0 = 273$ K).

10.12. Вклад электронов во внутреннюю энергию ε_e может быть получен из теории Ферми. Согласно [10.57], хорошим приближением в области плотностей и температур, достигаемых во взрывных методах, является выражение

$$\varepsilon_e \approx \frac{1}{2} \alpha_e \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/2} \Theta^2, \tag{10.15}$$

где α_e — постоянная, а ее значения приведены в табл. 10.I.

10.13. Для расчетов потенциальной энергии ε_c наиболее трудным этапом является выбор простой теоретической модели. Доста-

ТАБЛИЦА 10.1

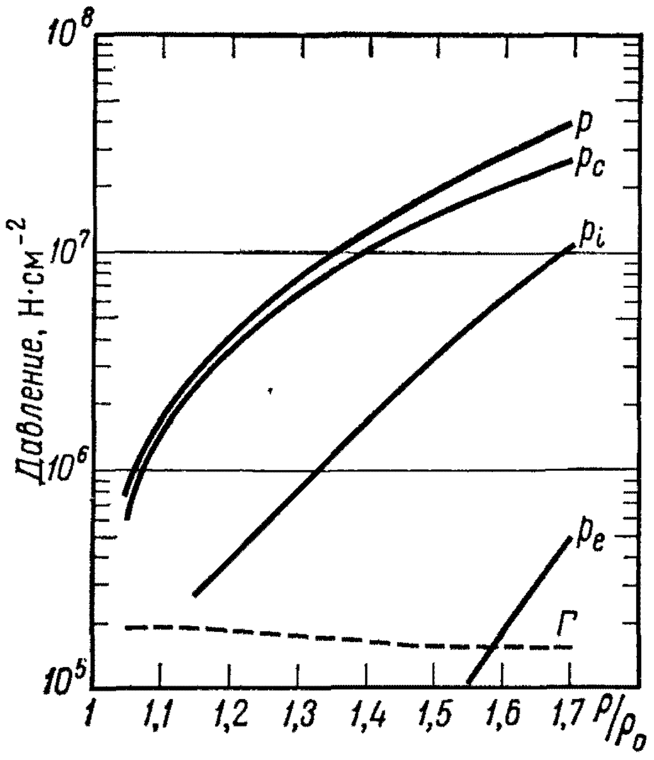
Уравнения состояния некоторых металлов

Параметр	Единица	Al (24ST)	Fe	Латунь (58% Cu)	Cu	Pb	W	Литература
Плотность ρ_0 при 0 °C	г/см^3	2,71	7,8	8,5	8,93	11,3	19,3	
Плотность $\rho_{00} = V_{00}^{-1}$ при 0 K	г/см^3	2,746	—	—	9,024	11,60	19,40	[10.64] [10.156]
Молярный вес	г/моль	27,0	55,8	—	63,5	207,2	183,9	
Скорость звука c_0	см/мкс	0,52	$\sim$ 0,45	—	0,39	0,19	—	[10.54]
Параметр C	см/мкс	0,52	0,39	0,37	0,40	0,20	0,40	[10.54—10.59; 10.50], уравнение (10.40)
Параметр S	—	1,4	1,6	1,5	1,50	1,52	1,27	
Плотность тепловой энергии ε_{i0} при 0 °C	Дж/г	161	—	—	77	32	28	[10.57, 10.64]
Средняя теплоемкость c_ρ (20° C)	Дж/г·(°C)$^{-1}$	0,90	—	—	0,38	0,129	0,136	[10.57, 10.64], п. 10.7
Коэффициент Грюнайзена $\Gamma(\rho_0)$	—	2,08	1,95	—	1,98	2,46	—	[10.57, 10.64, 10.103]
Электронный коэффициент α_e	10^{-7} Дж/г·(°C)$^{-2}$	500	—	—	110	140	60	[10.57, 10.64], уравнение (10.15)
Дебаевская температура Θ_D (0 °C)	K	390	420	—	320	88	350	[10.17]
Температура Ферми Θ_F	K	$\sim$ 13 000	$\sim$ 30 000	—	8 200	$\sim$ 11 000	—	

точно хорошее приближение может быть получено с помощью модели Томаса — Ферми [10.153], но эта модель справедлива только при давлениях выше 10—100 Мбар. При более низких давлениях чаще всего используют эмпирические выражения, основанные на экспериментальных данных, полученных в экспериментах по ударному сжатию. Так, например, в работе [10.62] было показано, что выражение

$$\varepsilon_c \approx \frac{1}{2} c_0^2 \left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2, \tag{10.16}$$

где c_0 — скорость звука при нормальных условиях, описывает с точностью до нескольких процентов экспериментальные значения для меди и алюминия в области давлений от 0,2 до 10 Мбар.



Фиг. 10.4. Давление в меди при ударном сжатии.

p_c — вклад от решетки (холодное сжатие); p_i и p_e — тепловые вклады от ионов и электронов; Г — коэффициент Грюнайзена (безразмерный), изменяющийся в пределах от 2,0 до 1,54. (Кривые построены по данным работы [10.57].)

10.14. Как и внутреннюю энергию [уравнение (10.13)], давление можно представить в виде

$$p = p_c(V) + p_i(V, \Theta) + p_e(V, \Theta). \tag{10.17}$$

На основе нашей простой модели для металла, рассмотренной в п. 10.3, можно получить выражения для всех трех компонент давления (фиг. 10.4) в явном виде.

Например, зная свободную удельную энергию F и используя основное термодинамическое соотношение, получим

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}. \tag{10.18}$$

Для ансамбля ионов, совершающих гармонические колебания, при $k\Theta \gg h\langle\nu\rangle$ имеем (см. [10.17] или [10.153])

$$F = \varepsilon_c(V) + 3Nk\Theta \cdot \ln \frac{h\langle\nu\rangle}{k\Theta}\,; \tag{10.19}$$

здесь $\langle\nu\rangle$ — средняя частота колебаний, которая в модели Эйнштейна просто равна $\langle\nu\rangle = \nu_0$, а с учетом дебаевского спектра частот (10.1) $h\langle\nu\rangle = 0{,}715k\Theta_D$.

10.15. Дифференцируя соотношение (10.19), можно определить два члена в (10.17): p_c и p_i. Первый из них

$$p_c = -\frac{d\varepsilon_c}{dV} \tag{10.20}$$

характеризует чисто упругий вклад в давление и означает просто, что увеличение потенциальной энергии равно работе сжимающих сил. Для этого члена, как и для ε_c, чаще всего используют эмпирические соотношения. Например, из (10.16) получим следующее приближение:

$$p_c \approx c_0^2 \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right). \tag{10.21}$$

10.16. Второй член уравнения (10.17) может быть получен из соотношения (10.19) и записан в виде

$$p_i = \Gamma \frac{\varepsilon_i}{V}, \tag{10.22}$$

где

$$\Gamma(V) = -\frac{d \ln \langle\nu\rangle}{d \ln V} \tag{10.23}$$

есть так называемый *коэффициент Грюнайзена*. Если сравнить это выражение с соответствующим выражением для идеального газа

$$p = \frac{\gamma - 1}{V}\,\varepsilon, \tag{10.24}$$

где γ — показатель адиабаты, связанный с числом степеней свободы f соотношением

$$\gamma = 1 + \frac{2}{f}, \tag{10.25}$$

то можно увидеть, что имеет место формальное соответствие

$$\Gamma \to \gamma - 1. \tag{10.26}$$

Значения коэффициента Грюнайзена колеблются от Γ_0 $(V = V_0) \approx$ ≈ 2 до $\Gamma \approx {}^2/_3$ (см. табл. 10.I и фиг. 10.4); его предельная величина может быть получена в рамках модели Томаса — Ферми и, как легко видеть, соответствует свободному поступательному движению с тремя степенями свободы ($f = 3$).

10.17. Наконец, полное давление (10.17) содержит также член p_e, зависящий от степени вырождения электронного газа. В соответствии с уравнением энергии (10.15) получим [10.57]

$$p_e \approx \frac{\alpha_e}{V_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-2}\Theta^2. \tag{10.27}$$

При ударном сжатии твердых тел вклад этого члена в полное давление обычно мал (фиг. 10.4), но в проводниках, нагреваемых при диффузии сверхсильного поля, величина p_e может достигать заметных значений.

10.18. Используемые на практике уравнения состояния чаще всего получают, комбинируя наиболее простым способом отдельные выражения, рассмотренные выше. В частности, в случае холодного сжатия для ε_c и p_c можно использовать протабулированные значения (см. фиг. 10.3 и 10.4) или выражения, полученные аппроксимацией численных расчетов (см. [10.103]). Например, если воспользоваться выражениями (10.21) и (10.22), то, пренебрегая членами ε_e и p_e, получаем простые уравнения состояния

$$\begin{aligned}\varepsilon &\approx \frac{1}{2}c_0^2\left(\frac{V_0}{V}-1\right)^2+c_\rho(\Theta-\Theta_0),\\ p &\approx c_0^2\left(\frac{V_0}{V}\right)^2\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{V_0}\right)+\frac{\Gamma c_\rho(\Theta-\Theta_0)}{V},\end{aligned} \tag{10.28}$$

где для Γ и c_ρ могут быть приняты их (постоянные) значения при нормальных условиях (табл. 10.I).

Фазовый переход

10.19. При взаимодействии мегаэрстедных полей с проводниками температура последних за счет выделяющегося джоулева тепла может достигать значений, превосходящих 10 000 K. Следовательно, необходимо рассматривать также фазовые переходы, которые будут иметь место в металле (фиг. 10.5).

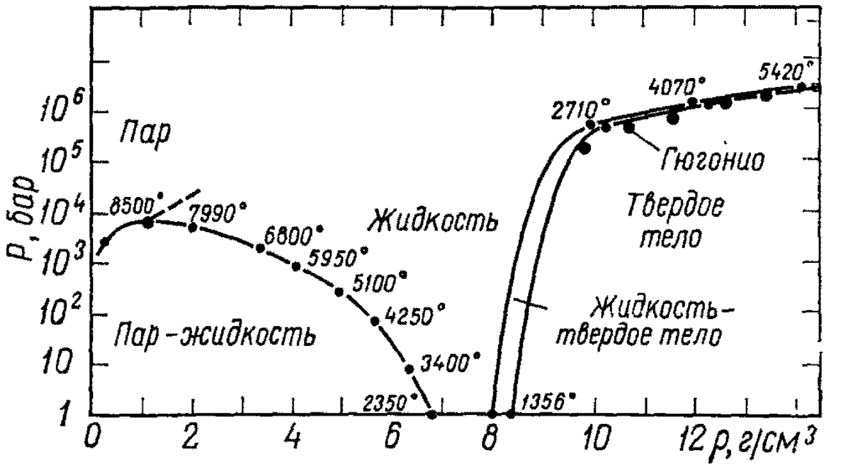
Первый из них — переход из твердого состояния в жидкое. В большинстве задач, представляющих интерес, этот процесс играет ограниченную роль. Например, с количественной, энергетической точки зрения скрытая теплота плавления ε_m (табл. 10.V) мала по сравнению с другими видами энергии (ε_i,

ТАБЛИЦА 10.II

Некоторые параметры меди

Параметр	Обозначение	Величина	Литература
Критическая температура	$\Theta_{\text{крит}}$	8500 K	
Критическое давление	$P_{\text{крит}}$	6,53 кбар	[10.52]; фиг. 10.5
Критическая плотность	$\rho_{\text{крит}}$	1,14 г/см^3	
Поверхностное натяжение (1131 °C)	T_s	1,1 Н/м	[10.156], п. 9.23
Вязкость (1200 °C)	—	$3{,}12\cdot10^{-3}$ кг/м·с	[10.156]
Теплопроводность (0 °C)	λ	385 Дж/м·с·К	[10.156]
Число Лоренца (0 °C)	L	$2{,}23\cdot10^{-8}$ Вт·Ом/К^2	[10.17], п. 10. 5
Отношение удельных сопротивлений	η_d/η_0	$2\cdot10^{-3}$	п. 10.40
Коэффициент зависимости электропроводности от давления	α	2,7	[10.17], п. 10.43
Время релаксации (0 °C)	τ	$5{,}3\cdot10^{-14}$ с	[10.17], п. 10.39
Средняя длина свободного пробега (0 °C)	λ_e	$4{,}2\cdot10^{-8}$ м	
Электронная плотность (0 °C)	n_e	$8{,}5\cdot10^{28}$ м$^{-3}$	
Ионная энергия связи	W_B	3,5 эВ	[10.17], п. 10.2
Сжимаемость (0 °C)	$-(1/\partial V)(\partial V/\partial p)$	$7\cdot10^{7}$ бар$^{-1}$	

ε_c; см. фиг. 10.3), которые характеризуют металл в представляющей для нас интерес области давлений и температур (мегабары, 10 000 К). Кроме того, структурное расположение атомов или ионов в решетке не претерпевает существенных изменений при быстром режиме нагрева (порядка нескольких микросекунд), характерном для процессов джоулева нагрева.



Фиг. 10.5. Фазовая диаграмма для меди.

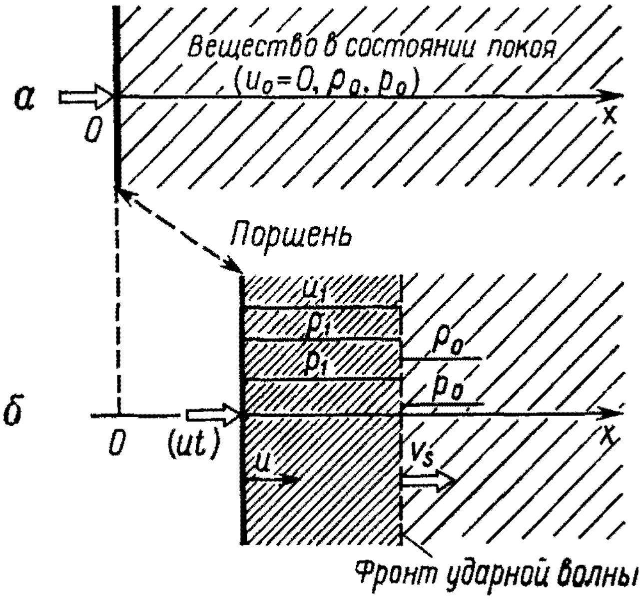
Цифры соответствуют температуре в градусах Кельвина. Кривая состояния жидкость — пар взята из [10.52], кривая жидкость — твердое тело из [10.53], где приводятся аналогичные кривые для Al, Ni и Pb. Приведено также несколько точек кривой Гюгонио для меди при нормальных условиях (1 бар; 8,92 г/см³; 272 K). Изотерма начинается от критической точки (6,53 кбара, 1,14 г/см³, 8500 K), т. е. линия раздела между жидкостью и паром неизвестна.

10.20. Более важным для нас является процесс испарения (сублимации) металла, так как он может заметно изменить условия на поверхности. К сожалению, этот процесс довольно трудно правильно описать, когда он протекает в короткие интервалы времени, как это имеет место в экспериментах со сверхсильными полями. Действительно, в связи с быстрым процессом нагрева металла в конденсированном состоянии он может существенно перегреться до того, как начнется процесс испарения. В генераторах мегаэрстедных полей ситуация еще более сложна, поскольку электропроводящий пар может взаимодействовать с магнитным полем, которое препятствует его расширению. В любом случае в результате этого процесса будет развиваться так называемая волна испарения (п. 5.19), распространяющаяся в глубь металла и в конечном счете испаряющая заметное количество материала стенки.

В качестве примера использования уравнения состояния, учитывающего фазовый переход твердое тело — пар, можно указать исследование по диффузии мегаэрстедного магнитного поля, проведенное в работе [1.30].

Соотношения Гюгонио

10.21. Общее представление об ударной волне (которое предполагается известным, см., например, [10.155]) [1]) лучше всего ввести, используя пример, приведенный на фиг. 10.6. Поршень, движущийся со скоростью u в первоначально покоящейся среде,



Фиг. 10.6. Возникновение идеальной ударной волны перед движущимся поршнем в покоящейся среде.

создает скачок уплотнения, который распространяется в среде со скоростью v_S (фиг. 10.6, *б*). Движущийся скачок уплотнения и есть ударная волна.

10.22. Стационарная плоская ударная волна, распространяющаяся в изотропной сжимаемой среде, описывается тремя *соотношениями Гюгонио*, выражающими законы *сохранения массы*, *импульса* и *энергии* при переходе через скачки уплотнения. Используя обозначения фиг. 10.6, эти законы сохранения можно записать в виде

$$\frac{1}{V_1}(v_S-u_1)=\frac{1}{V_0}v_S, \tag{10.29}$$

$$p_1+\frac{1}{V_1}(v_S-u_1)^2=p_0+\frac{1}{V_0}v_S^2, \tag{10.30}$$

$$\varepsilon_1+p_1V_1+\frac{1}{2}u_1^2=\varepsilon_0+p_0V_0. \tag{10.31}$$

Здесь v_S, u, $V=1/\rho$, p, ε — соответственно скорость ударной волны, скорость потока за ударной волной, удельный объем, давление и внутренняя энергия единицы массы. Индексы 0 и 1 соответствуют величинам перед фронтом ударной волны и за ним.

[1]) Теория ударных волн рассмотрена также в монографиях [10.112] и [10.153].— *Прим. перев.*

Соотношения Гюгонио можно также записать и в другой форме:

$$\frac{u_1}{v_S} = 1 - \frac{V_1}{V_0}, \tag{10.32}$$

$$p_1 - p_0 = \frac{1}{V_0} v_S u_1, \tag{10.33}$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_0)(V_0 - V_1). \tag{10.34}$$

Уравнения (10.32) и (10.33) можно разрешить относительно u и v_S, получив простые выражения

$$v_S^2 = V_0^2 \frac{(p_1 - p_0)}{(V_0 - V_1)}, \tag{10.35}$$

$$u_1^2 = (p_1 - p_0)(V_0 - V_1). \tag{10.36}$$

В случае когда начальным давлением можно пренебречь ($p_1 \gg p_0$), из (10.34) и (10.31) получим, что $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \approx {}^1/_2\, u_1^2$; это выражение определяет соотношение между кинетической и внутренней энергией в среде, в которой распространяется ударная волна.

10.23. Для полного описания задачи ударного сжатия необходимо дополнительно к трем основным уравнениям динамики добавить еще одно очевидное уравнение — обычное уравнение состояния, характеризующее термодинамические свойства среды. Предполагается, что оно может быть представлено в виде [см., например, (10.28)]

$$p = p(V, \varepsilon). \tag{10.37}$$

Подставляя внутреннюю энергию ε из уравнения (10.31), это соотношение можно преобразовать к более простому виду:

$$p = H_0(V), \tag{10.38}$$

где H_0 — адиабата Гюгонио, соответствующая начальному состоянию (p_0, V_0) [1]). Аналогично, используя (10.34), можно показать также, что

$$p = H_0(u). \tag{10.39}$$

Последнее соотношение определяет кривую Гюгонио — Ренкина в координатах (u, p), т. е. геометрическое место точек в плоскости (u, p), которые могут быть достигнуты при прохождении ударной волны в веществе с начальным состоянием (u_0, p_0). Адиабаты Гюгонио определены для многих твердых тел (фиг. 10.7 и 10.8).

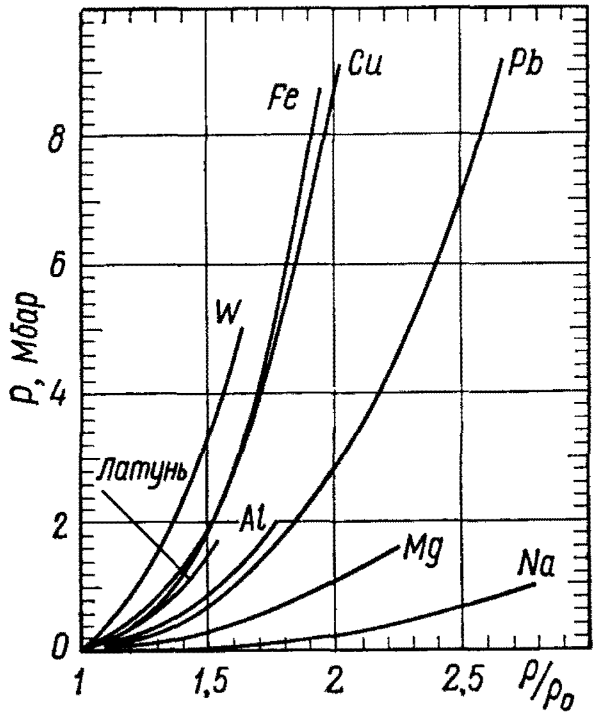
10.24. Измеренные для большинства металлов значения скоростей ударной волны и потока описываются с точностью до нескольких процентов линейным соотношением

$$v_S = C + Su, \tag{10.40}$$

---

[1]) В монографии Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [10.153] используется термин «ударная адиабата», однако при переводе было решено оставить терминологию автора.— *Прим. перев.*

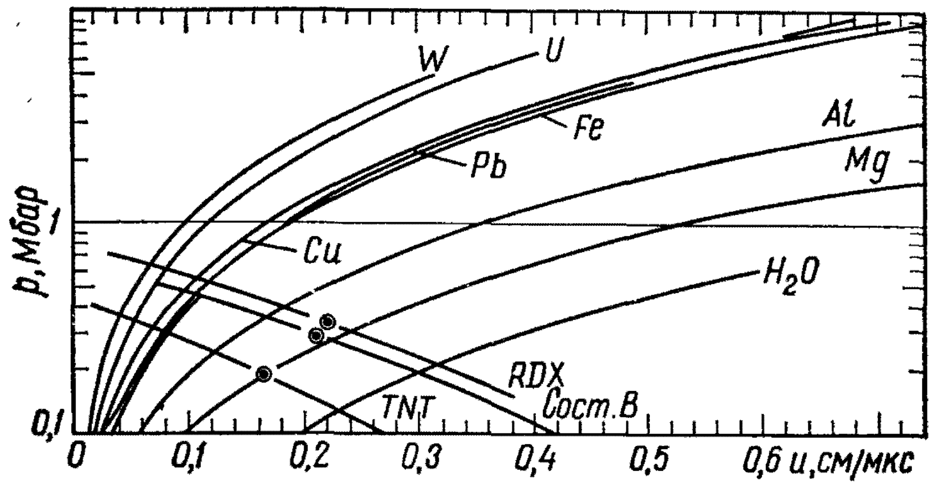
где C — величина, равная (почти) скорости звука c_0 в невозмущенной среде, а S — константа для данного материала (см.



Фиг. 10.7. Адиабаты Гюгонио (p, ρ_0) для различных металлов.

Построены на основе данных работ, указанных в табл. 10.I для значений параметров C и S.

табл. 10.I). В области, где справедливо это соотношение [и при условии правильности предположений, сделанных при выводе



Фиг. 10.8. Адиабаты Гюгонио (u, p) для различных веществ.

Отраженная ударная волна для состава B (34% TNT, 64% RDX; $\rho = 1{,}714$ г/см³; $v_\Delta = 0{,}799$ см/мкс) построена на основании данных, приведенных в [10.108]; соответствующие кривые для TNT и RDX построены на основе данных других источников. На этих трех кривых кружками показаны соответствующие точки Чепмена — Жуге.

соотношения (10.33)], соотношения Гюгонио могут быть записаны в простой параболической форме

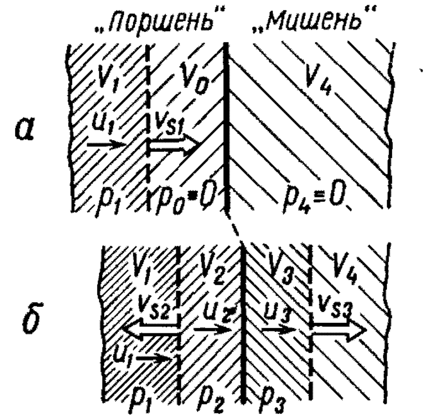
$$p = \frac{1}{V_0}(c_0 + Su)u, \tag{10.41}$$

или

$$p=\frac{c_0^2\,(V_0-V)}{[S\,(V_0-V)-V_0]^2}.$$

В качестве примера можно указать, что для меди эти кривые с точностью не хуже 2% совпадают в области от 0,1 до 9 Мбар с адиабатами Гюгонио, приведенными на фиг. 10.7.

10.25. Формулы для ударной волны в идеальном газе, уравнение состояния которого записывается в виде (10.24), могут быть



Фиг. 10.9. Прохождение ударной волны через границу двух сред «поршень» (индекс 0) —«мишень» (индекс 4).

Начальная ударная волна (индекс 1), прошедшая (индекс 3) и отраженная (индекс 2) на поверхности раздела. Все скорости отсчитываются от состояния покоя, т. е. относительно невозмущенной массы.

легко получены из уравнений, приведенных в п. 10.22. Для сильной ударной волны ($p_1 \gg p_0$) из (10.32), используя (10.36), получаем известные выражения

$$\frac{V_1}{V_0}\approx\frac{\gamma-1}{\gamma+1},\quad v_S\approx\frac{1}{2}(\gamma+1)\,u,\quad u\approx c_0\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}\right\}},$$

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_0}=\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2\approx\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\frac{p_1}{p_0}, \qquad (10.42)$$

где

$$c_i=\sqrt{(\gamma R\Theta_i)}=\sqrt{\left(\frac{\gamma p_i}{\rho_i}\right)}\qquad (i=0,\ 1)$$

есть локальная скорость звука.

Переход ударной волны через границу раздела двух сред

10.26. В качестве примера использования приведенных соотношений рассмотрим задачу перехода ударной волны из одной среды (*«поршень»*) в другую (*«мишень»*), как это схематически показано на фиг. 10.9.

Что произойдет после того, как ударная волна, движущаяся со скоростью v_{S1}, достигнет плоскости раздела i (фиг. 10.9, *б*)? В мишени возникнет новая ударная волна, в то время как волна v_{S2} (или волна разгрузки) отразится назад в поршень. Из очевидных физических соображений следует, что на плоскости раздела i

$$u_2 \equiv u_3 \tag{10.43}$$

$$p_2 \equiv p_3 \tag{10.44}$$

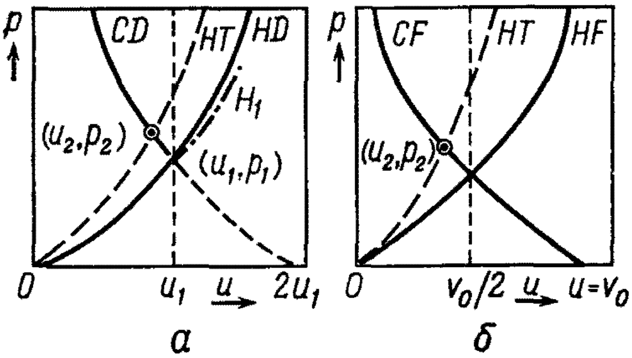
Эти значения давлений и скоростей могут быть найдены как решения двух уравнений, которыми являются адиабаты Гюгонио для мишени

$$p_3 = H_0(u_3) \tag{10.45}$$

и для поршня

$$p_2 = p_1 + H_1(u_2 - u_1). \tag{10.46}$$

Из последнего соотношения видно, что эта адиабата Гюгонио исходит из точки (u_1, p_1) или, другими словами, что соответствующая



Фиг. 10.10. Графические решения задачи о прохождении ударной волны (фиг. 10.9) в координатах (u, p) (*а*) и задачи с летящей пластинкой (фиг. 10.11) (*б*).

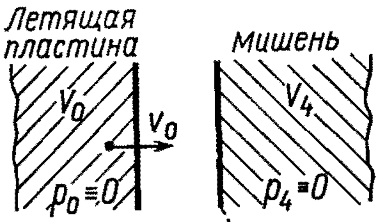
Точка $(u_2, p_2) \equiv (u_3, p_3)$ на фиг. 10.10, *а* определяется как точка пересечения адиабаты Гюгонио для «мишени» (HT) и соответствующей кривой для «поршня» (CD), которая обычно получается поворотом адиабаты Гюгонио для поршня (HD) около данной ординаты u_1. Адиабата Гюгонио (H_1), начинающаяся в точке (u_1, p_1), неидентична (HD), но для наших целей разница невелика и для простоты берется табулированная адиабата Гюгонио.

На фиг. 10.10,*б* секущая кривая (CF) — зеркальное отражение адиабаты Гюгонио, начинающейся в точке ($u_1 = v_0$, 0), для движущейся пластинки (HF).

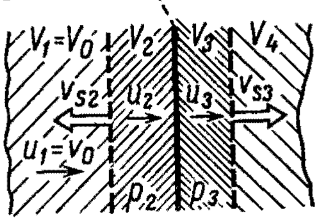
ударная волна распространяется в уже движущейся ($u = u_1$) и сжатой ($p = p_1$) среде.

Используя приближения для адиабаты Гюгонио в виде (10.41), совместное решение уравнений (10.45) и (10.46) можно получить аналитически, однако весьма часто эту задачу удобнее решать графически. Приблизительная процедура такого решения объяснена в подписи к фиг. 10.10, *а* и может быть легко понята из рассмотрения уравнений (10.45) и (10.46) [10.64]. На практике графическое решение заключается в нахождении точки пересечения (u_3, p_3) адиабат Гюгонио для мишени (HT) и поджимающего поршня (CD). Если точка пересечения лежит ниже точки «отражения» (u_1, p_1), т. е. $p_3 < p_1$, то будет иметь место волна разгрузки вместо ударной волны, распространяющейся назад в поршень. Скорость этой *волны разгрузки* v_R равна местной скорости звука c_0 относительно среды, т. е. $v_R = c_0 - u_1$. С другой стороны, прошедшая волна всегда является ударной. Если мишени нет совсем ($p \equiv 0$ для всех u), то $p_3 \equiv 0$ и *скорость свободной поверхности* всегда почти вдвое больше скорости потока ($u_3 = 2u_1$), что является результатом, имеющим фундаментальный характер.

а



б



Фиг. 10.11. Возбуждение ударной волны пластиной, движущейся со скоростью v_0 в покоящейся среде.

Зная значения p_3 и u_3, можно получить все другие величины, входящие в уравнения, приведенные в п. 10.22. Практически величины v_{S3} и V_3 для ударной волны, распространяющейся в мишени (с $u_4 \equiv 0$, $p_4 \equiv 0$, V_4), получаются из уравнений (10.32) и (10.33):

$$V_4 (v_{S3} - u_3) = V_3 v_{S3}, \tag{10.47}$$

$$V_4 p_3 = v_{S3} u_3. \tag{10.48}$$

В частном случае поршнем может служить взрывчатое вещество. Тогда «отражение» адиабаты Гюгонио производится относительно точки Чепмена — Жуге, определяемой исключительно параметрами детонационной волны данного конкретного взрывчатого вещества.

10.27. Задача об образовании ударной волны в мишени при ударе о нее «*летящей*» пластины, движущейся с постоянной скоростью v_0 (фиг. 10.11), является аналогичной, но более простой задачей по сравнению с задачей перехода ударной волны через границу раздела двух сред. Действительно, ударная волна, которая движется в обратном направлении в налетающей пластине (фиг. 10.11, *б*), распространяется в несжатой среде со скоростью $u_1 \equiv v_0$. Адиабаты Гюгонио для налетающей пластины, полученные вместо выражения (10.46), имеют более простой вид:

$$p_2 = H_0(v_0 - u_2). \qquad (10.49)$$

В плоскости (u, p) уравнение (10.49) представляет собой адиабату Гюгонио, «отраженную» относительно ординаты $u = {}^1/_2 v_0$, и начинается, следовательно, от точки $(v_0, 0)$ на абсциссе.

Как и в случае задачи о переходе ударной волны через границу раздела, решение $(u_2 \equiv u_3,\ p_2 \equiv p_3)$ находится из (10.49) и из адиабаты Гюгонио для мишени

$$p_3 = H_0(u_3). \qquad (10.50)$$

Графическое решение, как схематично показано на фиг. 10.10, *б*, получить несложно. Здесь кривая CF есть точное значение адиабаты Гюгонио для налетающей пластины; следовательно, в данном случае нет ограниченной области существования решений, как это было в рассмотренной ранее задаче перехода ударной волны (п. 10.26) через границу раздела.

§ 3. УСКОРЕНИЕ ЛАЙНЕРА ВЗРЫВОМ

Системы зарядов взрывчатых веществ

10.28. Большинство применений химических взрывчатых веществ основано на их разрушающих возможностях. В настоящее время, однако, известен целый ряд методов использования разрушительной силы взрыва для созидательной и порой очень точной полезной работы. Помимо генерации сверхсильных магнитных полей, для создания которых использование взрывной техники обсуждалось в гл. 8 и 9, следует обратить внимание на возможность получения сверхвысоких давлений [10.50], используемых для прессовки, закалки, сварки металлов и создания защитных покрытий [10.107].

Существует большое число химических взрывчатых веществ (см. [10.109] и табл. 10.III). Здесь мы остановимся лишь на так называемых мощных взрывчатых веществах, т. е. таких, в которых зона протекания химической реакции разложения распространяется в виде ударной волны со сверхзвуковой скоростью (*детонационная волна*).

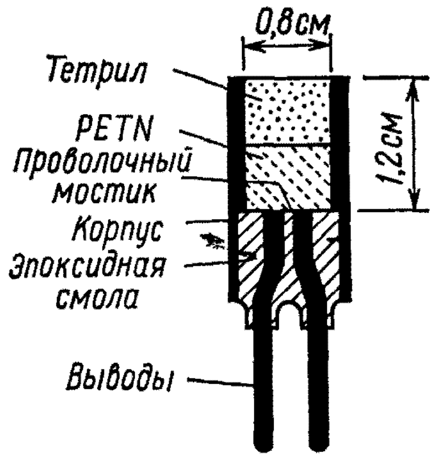
Очевидно, что успешное использование мощных взрывчатых веществ для точных экспериментов осуществимо только в том случае, если имеется возможность тщательного контроля состава и формы заряда, а также возможность достаточно точного формирования детонационной волны требуемой геометрии (см. фиг. 8.11 и 9.16).

ТАБЛИЦА 10.III

Свойства некоторых мощных взрывчатых веществ

Взрывчатое вещество	Состав	Теплота детонации (кДж/г)	Скорость детонации v_Δ, см/мкс	Плотность ρ_0, г/см^3	Температура плавления, °C	Примечание
Первичные взрывчатые вещества						Детонируют от нагрева, трения, легкого удара
Гремучая ртуть	$Hg(ONC)_2$	1,5	0,54	4,42	—	
Азид свинца	$Pb(N_3)_2$	1,1	0,51	4,79	—	
Вторичные взрывчатые вещества						
Твердые						
TNT	$(NO_2)_3C_6H_2CH_3$	4,0	0,69	1,64	81	
RDX (T4)	$(CH_2=N-NO_2)_3$	5,4	0,84	1,81	202	
PETN	$C\equiv[CN_2ONO_2]_4$	5,8	0,84	1,77	141	
Тетрил	$(NO_2)_3C_6H_4(NCH_3)NO_3$	4,6	0,75	1,73	129	
Состав B (тритолит)	40% TNT+60% RDX	4,8	0,78	1,72	—	
Пластические						
DAG, листовой (прокат)	PETN + пластификатор	5	0,73	1,6	—	
DAG, листовой (отливка)	Не опубликовано	~2,7	0,51	1,5	—	
DP, листовой	» »	4,8	0,68	1,50	—	
BPD, литое взрывчатое вещество (CP-8)	» »	5,7	0,80	1,63	—	
Жидкости						Очень опасен. Детонирует только с мощным бустерным зарядом [10.116]
Нитроглицерин	$C_3H_5O_9N_3$	6,2	0,78	1,59	11	
Мононитрометан	CH_3NO_2	5,4	0,62	1,125	—	

10.29. Обычно детонация заряда инициируется устройством, называемым *детонатором*. Детонатор должен: а) обеспечивать безопасность, б) создавать достаточный начальный импульс в заряде (необходимый для развития детонационной волны [10.116]) и в) иметь небольшие размеры и малые разбросы по времени срабатывания. Последнее требование связано с тем, что при скорости детонации 0,8 см/мкс ошибка во времени срабатывания в 0,12 мкс приводит к пространственной ошибке около 0,1 см. Таким образом, для обычных экспериментальных установок время разброса



Ф и г. 10.12. Безопасный детонатор с временны́м разбросом инициирования 20 нс [10.113].

между двумя или большим числом точек инициирования, предназначенных для одновременного подрыва, должно быть меньше 0,1 мкс. Такую точность обеспечивают электрические детонаторы.

В наиболее распространенных детонаторах проволочный мостик непосредственно вводится в «первичное» взрывчатое вещество (табл. 10.III). Детонатор подрывается при подаче напряжения на проволочный мостик. Действие такого устройства основано на том факте, что только очень чувствительное взрывчатое вещество, используемое в качестве первичной взрывчатки, может детонировать при нагреве, в то время как для детонации основного заряда требуется достаточно сильная ударная волна. Основная трудность, возникающая при использовании таких детонаторов в сложных экспериментальных устройствах, обусловлена их большой чувствительностью, т. е. проблемой их сохранности (такие детонаторы срабатывают при токе 100 мА через проволочный мостик с сопротивлением 10 Ом).

Можно создать весьма безопасные детонаторы, если ввести взрывающуюся проволочку непосредственно во вторичное взрывчатое вещество (фиг. 10.12). Такое устройство требует, чтобы

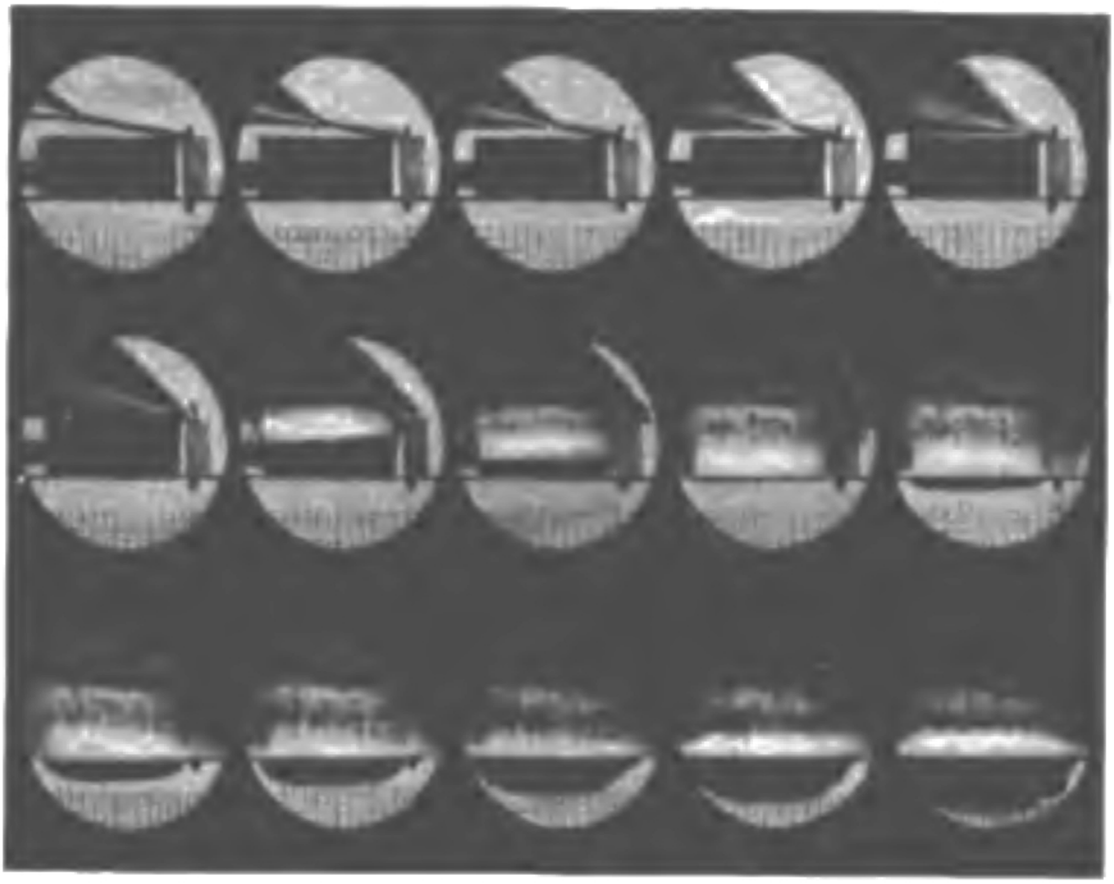
Ф и г. 10.13. Типичные формы зарядов, используемые группой во Фраскати [10.102].

A, *B*, *C*, *D*, *F* — обработанные отливки из состава В. Внешний диаметр наибольшего из них (*F*) равен 20 см; *H* и *I* — заряды из состава СР8 (табл. 10.III), обработанная отливка; *E*, *G* — сборные заряды типа 75 (аналогичные показанным на фиг. 9.21); *O* — медные шины, заполненные составом В (первая ступень устройства, показанного на фиг. 8.15); *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *U* — заряды из пластического взрывчатого вещества различной толщины и формы.

взрывающаяся проволочка создавала достаточно сильный импульс и использовалась мелкозернистая взрывчатка.

10.30. Основной заряд обычно изготовляется из твердой взрывчатки (например, состава В, см. табл. 10.III) и может иметь самую разнообразную форму (фиг. 10.13). Такие заряды отливаются в строго контролируемых условиях [10.102; 10.110], имеют высокую однородность и точные размеры ($\pm 0{,}01$ см), их поверхность должна быть достаточно гладкой (фиг. 10.14). В случае необходимости создания зарядов более разнообразной формы или для увеличения точности изготовления они могут подвергаться механической обработке.

Очень удобной взрывчаткой являются пластические взрывчатые вещества (табл. 10.III), так как из них можно «выкраивать» заряды практически любой формы и настилать их по любой искривленной поверхности (фиг. 10.13).



Фиг. 10.14. Возбуждение плоской детонационной волны летящей пластиной.

Основной заряд (основание 10 × 7 см², высота 4,2 см) ускоряет плоскую пластину из нержавеющей стали (толщиной 0,2 см). Система аналогична показанной на фиг. 8.11,*г*; время между кадрами 2 мкс.

Волна детонации

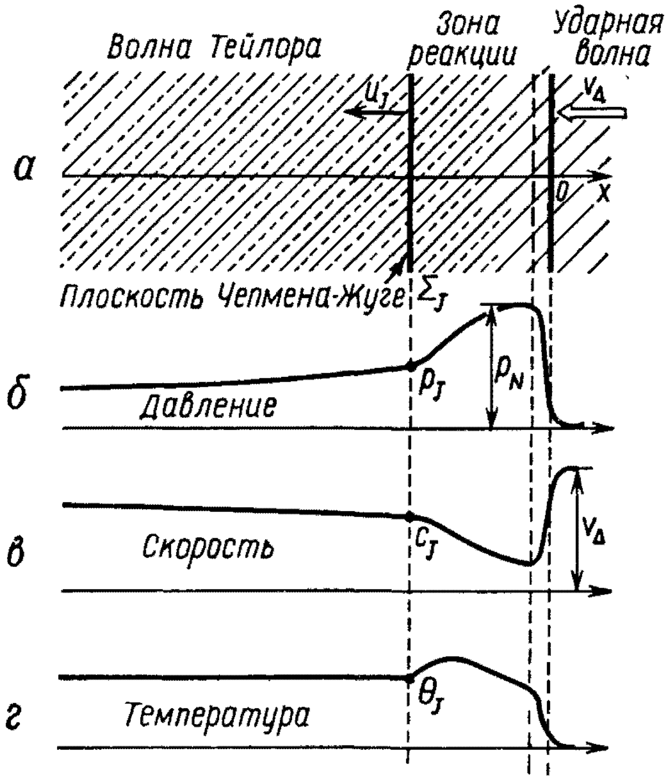
10.31. На фиг. 10.15 схематично показана плоская установившаяся детонационная волна. Для простоты фронт детонации зафиксирован, а непрореагировавшее взрывчатое вещество с массовой плотностью ρ_E набегает на фронт детонации со скоростью детонации v_Δ. Фактически вся масса взрывчатого вещества проходит вначале через ударный фронт в область ударной волны, где происходит ударный разогрев в область разложения, в которой выделяется удельная химическая энергия ε_E. В плоскости Σ_J (точка Чепмена — Жуге) реакция разложения заканчивается и продукты горения выбрасываются со скоростью $(v_\Delta - u_J)$, а затем развивается так называемая *волна Тейлора.*

Условия на поверхности Σ_J для непрореагировавшего взрывчатого вещества определяются уравнениями сохранения, использовавшимися при рассмотрении фронта ударной волны (см. п. 10.22), и соответствующим уравнением состояния для газообразных продуктов взрыва. Скорость детонации определяется *условиями Чепмена — Жуге,* которые требуют, чтобы скорость потока в плоскости Σ_J была равна местной скорости звука c_J, т. е.

$$v_\Delta = u_J + c_J. \tag{10.51}$$

Это условие является существенно эмпирическим, однако оно основано на экспериментальных данных и теоретических предпосылках [10.104].

10.32. Если рассматривать газообразные продукты взрыва как идеальный газ, описываемый уравнением состояния (10.24),



Фиг. 10.15. Плоская детонационная волна.

Для большинства взрывчатых веществ толщина зоны детонации порядка 0,1 см; давление на фронте примерно вдвое больше, чем в плоскости Чепмена — Жуге (распределение величин p, u и θ показано качественно). Заметим, что волна Тейлора (волна расширения) — неустановившаяся.

то для точки Чепмена — Жуге из уравнений, приведенных в п. 10.22 и (10.51), можно получить в пределе сильной детонации, что

$$p_J = \frac{\rho_E v_\Delta^2}{\gamma+1}, \qquad \rho_J = \frac{\gamma+1}{\gamma}\rho_E, \tag{10.52}$$

$$u_J = \frac{v_\Delta}{\gamma+1}, \qquad c_J = \frac{\gamma}{\gamma+1} v_\Delta = \sqrt{\left(\gamma \frac{p_J}{\rho_J}\right)}, \tag{10.53}$$

$$v_\Delta = \sqrt{\{2\varepsilon_E(\gamma^2-1)\}}, \tag{10.54}$$

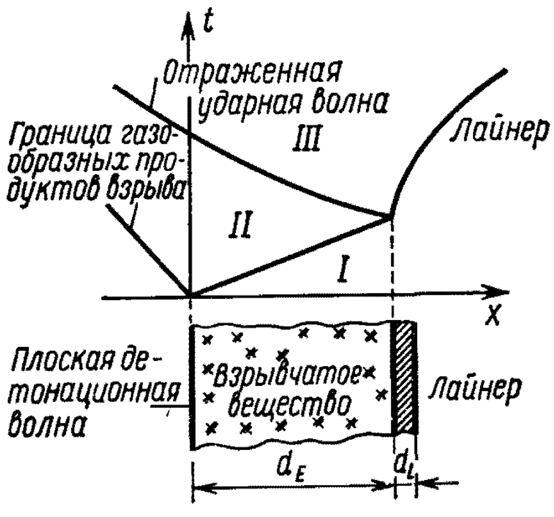
где скорости измеряются относительно непрореагировавшего взрывчатого вещества, e_E — удельная теплота химической реакции (более детальное рассмотрение можно найти, например, в [3.4]).

10.33. В случае цилиндрического генератора сверхсильного магнитного поля детонационная волна является ярким примером цилиндрической сходящейся волны. В точке Чепмена — Жуге и в зоне реакции поток ни в коем случае нельзя считать установившимся, так как все параметры существенно меняются в течение всего процесса схлопывания. Было предложено много теорий, описывающих сходящуюся детонационную волну. Однако для цилиндрических зарядов, внешний радиус которых, как правило, примерно в 5 раз превосходит внутренний, различие между цилиндрической и плоской установившейся детонационными волнами пренебрежимо мало [10.115]. Так, например, для изменения давления с радиусом в работе [10.114] было предложено приближение

$$\frac{p}{p_J} \approx \left(\frac{r}{R_3}\right)^{-3/16}.$$

Ускорение плоского лайнера

10.34. Рассмотрим сначала несжимаемый лайнер, находящийся в непосредственном контакте с взрывчатым веществом. Эта задача детально анализировалась в [10.100], и результаты анализа



Фиг. 10.16. Пространственно-временнáя диаграмма движения несжимаемого лайнера.

представлены на фиг. 10.16 в виде пространственно-временны́х диаграмм. Плоская детонационная волна, образовавшаяся на свободной поверхности заряда в момент времени $t = 0$, распространяется по направлению к лайнеру, при этом позади фронта (II) создается область изэнтропического течения, которая может быть достаточно хорошо описана волной Тейлора (фиг. 10.15). Затем детонационная волна при взаимодействии с поверхностью лайнера отражается назад в область (II) в виде слабой ударной волны (III). После отражения ударной волны лайнер постепенно ускоряется давлением p_L, сохраняющимся на его поверхности.

10.35. В частном случае $\gamma = 3$ эта задача может быть решена аналитически. (Заметим, что для взрывчатого вещества состава B, данные для которого приведены в табл. 10.III, из соотношения (10.54) имеем $\gamma = 2{,}71$.) В этом простом, но поучительном случае движение лайнера описывается в параметрической форме [10.100]

$$t\,\frac{v_\Delta}{d_E} = \left[1 + \frac{27\,(1 - 1/\alpha^2)}{32 r_M}\right]^{-1}, \tag{10.55}$$

$$\frac{v_L}{v_\Delta} = 1 - \frac{27}{32 r_M}\left(1 + \frac{32}{27} r_M \alpha - 2 + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{10.56}$$

$$x_L = \alpha + \frac{v_L}{d_E}\,t; \tag{10.57}$$

отсюда давление равно

$$p_L = \frac{16}{27}\,\rho_E v_\Delta^2 \left(\alpha\,\frac{d_E}{v_\Delta t}\right)^3, \tag{10.58}$$

где

$$r_M = \frac{\rho_E d_E}{\rho_L d_L} \tag{10.59}$$

есть отношение массы заряда к массе лайнера. Из этих выражений можно получить ряд существенных результатов. Например, если положить $t \to \infty$, т. е. взять $\alpha = (1 + {}^{32}/_{27} r_M)^{-1/2}$, из уравнения (10.55) можно определить конечную скорость лайнера

$$\frac{v_\infty}{v_\Delta} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{32}{27} r_M\right)} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{32}{27} r_M\right)} + 1}, \tag{10.60}$$

где, согласно (10.54),

$$v_\Delta = 4\sqrt{\varepsilon_E}. \tag{10.61}$$

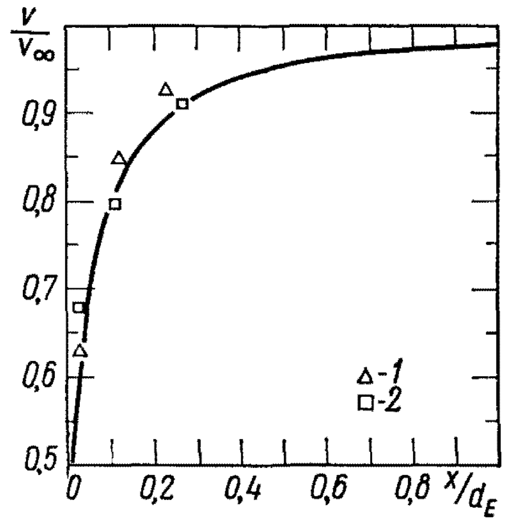
Для эффективности преобразования химической энергии взрывчатого вещества в кинетическую энергию лайнера (фиг. 8.13), согласно определению (8.52), имеем

$$\eta_K = \frac{\rho_L d_L v_\infty^2}{2 \rho_E d_E \varepsilon_E} = \frac{8}{r_M}\left(\frac{v_\infty}{v_\Delta}\right)^2. \tag{10.62}$$

Определяя максимум η_K относительно r_M, получаем, что

$$\eta_{K_m} = \frac{256}{729} \approx 0{,}35 \quad \text{при} \quad r_{M_m} = \frac{81}{32} \approx 2{,}5.$$

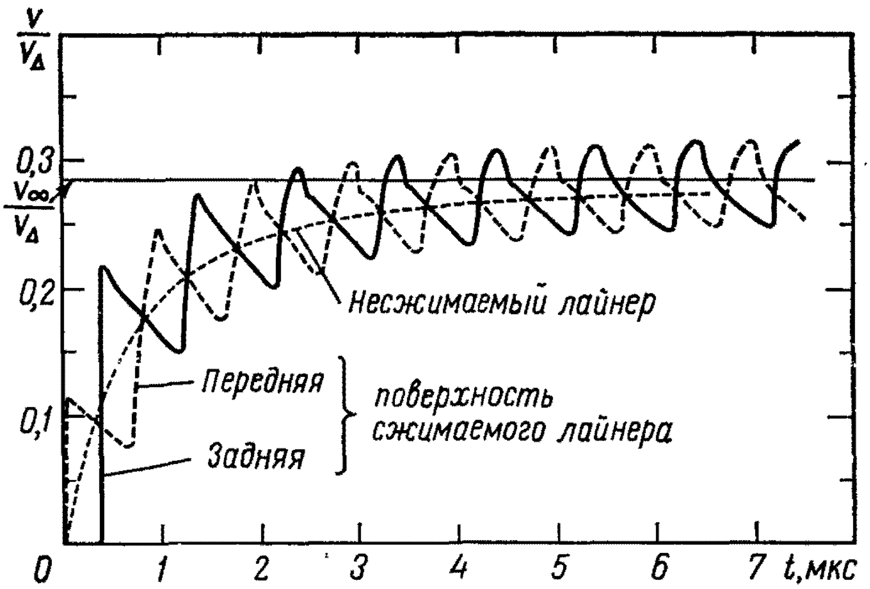
10.36. Интересно отметить, что решения, полученные численными методами, с γ, изменяющейся от 2,5 до 3,5 [10.100], дают с точностью 1—2% те же самые значения, что и равенства (10.60) и (10.61), полученные для частного случая $\gamma = 3$. На первый взгляд этот результат может показаться удивительным, так как



Ф и г. 10.17. Относительная скорость лайнера как функция относительного расстояния пролета.

Кривая с точностью до ± 5% согласуется с точками, рассчитанными из (10.56) и (10.60) для $1 \leqslant r_M \leqslant 20$. Экспериментальные точки взяты из работы [10.101], в которой латунная пластина ускорялась взрывом плоского заряда состава В толщиной 10,1 см. $1 - r_M = 3{,}2$; $2 - r_M = 5{,}9$.

влияние γ на параметры в точке Чепмена — Жуге [см. (10.52) — (10.54)] и в волне Тейлора значительны. Другой существенный результат, который можно получить из соотношений (10.55) —



Ф и г. 10.18. Зависимость скорости от времени для передней и задней поверхностей сжимаемого медного лайнера, ускоренного зарядом ($d_E = 2$ см, $d_L = 0{,}2$ см) состава В.

Для сравнения показаны также изменения скорости для несжимаемого лайнера [1.110].

(10.57) и (10.60), изображен на фиг. 10.17. Видно, что ускорение лайнера заканчивается на расстояниях, составляющих примерно $^1/_5$ от толщины заряда.

10.37. Теперь рассмотрим плоский сжимаемый лайнер. Когда волна детонации достигает металла и ударная волна переходит в лайнер, ее параметры полностью определяются соотношениями, приведенными в п. 10.26. Например, если заряд из состава B возбуждает в медном лайнере ударную волну, то из фиг. 10.8 можно найти, что $u = 0{,}09$ см/мкс, $p = 0{,}45$ Мбар; отсюда, согласно (10.40), $v_S = 0{,}54$ см/мкс.

При прохождении ударной волны металл ускоряется до скорости u. Когда ударная волна достигает свободной поверхности, эта часть лайнера ускоряется до скорости, вдвое превышающей скорость потока (см., например, п. 10.26). Последовательность отраженных и переотраженных ударных волн будет затем прерывисто ускорять лайнер (фиг. 10.18) до тех пор, пока он в конце концов не достигнет скорости, близкой к скорости жесткого лайнера.

§ 4. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ

Введение

10.38. Согласно закону Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{10.63}$$

электропроводность является физическим параметром, связывающим электрическое поле $\mathbf{E}$ с плотностью тока $\mathbf{j}$. В наиболее общем случае проводимость может быть записана в виде тензора. Однако здесь будут рассмотрены только такие случаи, когда $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ параллельны, так что σ преобразуется в скалярную функцию, которая тем не менее может зависеть от различных физических величин.

10.39. Механизм проводимости можно формально интерпретировать как течение свободных электронов, которому препятствуют различные процессы взаимодействия. Если ввести, согласно теории переноса, *время релаксации* τ для рассеяния таким образом, что полная средняя скорость дрейфа электронов может быть представлена в виде

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2} \frac{\tau e E}{m_e}, \tag{10.64}$$

то плотность тока будет

$$j = n_e e \langle v \rangle = \frac{1}{2} n_e \frac{e^2}{m_e} \tau E. \tag{10.65}$$

Следовательно, в соответствии с (10.63) проводимость формально может быть представлена в виде

$$\sigma = \frac{1}{2} n_e \frac{e^2}{m_e} \tau, \tag{10.66}$$

где n_e — плотность свободных электронов (примерно один свободный электрон на атом), e и m_e — соответственно заряд и масса электрона. Вместо τ можно также ввести величину среднего свободного пробега электрона

$$\lambda_e = \tau \langle v \rangle = \frac{1}{n_i S_e}, \tag{10.67}$$

где n_i — плотность рассеивающих центров (например, ионов), а S_e — сечение рассеяния. Значения величин τ и λ_e, рассчитанные по модели свободных электронов Зоммерфельда, приведены в табл. 10.II.

Проводимость твердого тела

10.40. В твердом проводнике электроны проводимости могут взаимодействовать с нерегулярностями решетки (примеси, дефекты, границы микроструктур и т. д.) и с тепловыми колебаниями ионов в решетке (фононами); последний эффект, очевидно, зависит от температуры. Полное удельное сопротивление $\eta = 1/\sigma$ можно, следовательно, разделить на зависящую (η_θ) и не зависящую (η_d) от температуры компоненты:

$$\eta = \eta_d + \eta_\theta.$$

При комнатных температурах вклад η_d, как правило, пренебрежимо мал (табл. 10.II).

10.41. Качественные оценки температурной зависимости проводимости можно легко получить на основе модели, описанной в пп. 10.2—10.3. Действительно, из соотношений (10.66) и (10.67) видно, что проводимость обратно пропорциональна сечению рассеяния S_e, т. е. обратно пропорциональна среднему квадрату расстояния между ионами:

$$\sigma = \frac{1}{\eta} \sim \frac{1}{\langle x^2 \rangle}.$$

Для температур выше дебаевской из уравнений (10.3), (10.4) и (10.6) следует

$$\sigma \sim \frac{\Theta_D^2}{\Theta}. \tag{10.68}$$

Наиболее современные теории металлов подтверждают эти выводы и дают точные выражения для проводимости (см., например, [10.5]). Не вдаваясь в детали теории, ограничимся рассмотрением экспериментальных результатов, которые качественно описываются этим простым законом проводимости в интервале от 100 К до температуры плавления.

ТАБЛИЦА 10.IV

Металлические проводники [1])

Параметр	Единица	Медь (электролитическая)	Латунь (Cu 58%, Zn 42%)	Хромистая медь (Cr 0,7%)
Удельное сопротивление η_0 (20 °C)	мкОм·см	1,72	6,2	3,83
Проводимость σ_0 [2])	10^6 (Ом·м)$^{-1}$	63,3	15,7	27,2
Температурный коэффициент [2]) ($\beta\bar{c}_\rho\bar{\rho}$)	10^{-3} (°C)$^{-1}$	5,15	2,1	2
средний в температурном интервале	°C	(0—1083)	(0—100)	(20)
Массовая плотность ρ_0 (20 °C)	10^3 кг/м^3	8,92	8,44	8,9
Теплоемкость c_v (20 °C)	10^6 Дж/м^3·°C	3,43	3,18	3,42
Теплоемкость $\bar{c}_\rho$	10^3 Дж/кг·°C	0,44	0,45	0,39
средняя в температурном интервале	°C	(0—1083)	(20—550)	(20)
Температура плавления	°C	1083	900	—
Характерное поле h_c [4])	кЭ	430	670	650
Коэффициент магнитной диффузии $\varkappa_0 = (\sigma_0\mu_0)^{-1}$	10^{-2} м^2/с	1,26	5,1	2,9

[1]) По данным работ [10.7] и [10.8].
[2]) Линейная аппроксимация (10.69) в указанном температурном интервале.
[3]) До точки перехода $\alpha - \gamma$ (915 °C).

10.42. Запишем закон изменения проводимости от температуры в виде

$$\sigma \equiv \frac{1}{\eta} = \frac{\sigma_0}{1+\beta Q}, \tag{10.69}$$

где

$$Q = c_v\theta \tag{10.70}$$

есть плотность тепловой энергии при температуре 0 °C и выше, β — тепловой коэффициент, θ — температура в градусах Цельсия, а σ_0 — проводимость при 0 °C (фиг. 10.19). Значения величин σ_0 и β, приведенные в табл. 10.IV, определены из опубликованных кривых зависимости удельного сопротивления различных металлов от температуры в интервале от 0 °C до температуры плавления (фиг. 10.20, 10.21). За исключением нескольких металлов

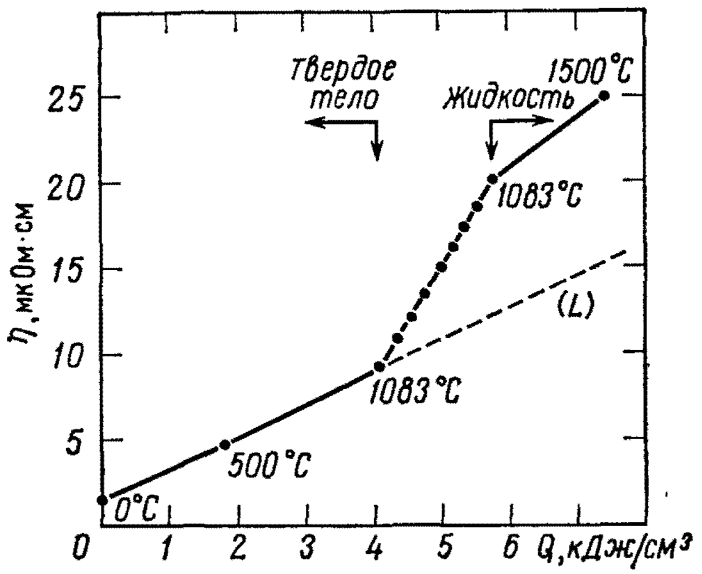
Бериллиевая бронза (Be 2%, Co 0,4%)	Кремниевая бронза (Si 2%, Mn 0,5%)	Al (99,5%), отожженный при 300 °C	Железо (электрическое)	Нержавеющая сталь (AISI 304)	Ртуть (жидкая)	W	Сплав Вуда (Bi 50%, Pb 25%, Sn 12,5%, Cd 12,5%)
9	17,2	2,77	9,8	72	94,8	5,5	55
11,5	6,1	39,2	11,3	1,38	1,06	20,6	1,9
1,6	0,56	5,8	~ 13,6 [3])	0,9	1,2	5,8	2,9
(0—300)	(0—100)	(0—658)	(0—900)	(0—1000)	(20)	(0—3380)	(0—73)
8,3	8,72	2,7	7,87	8,03	13,5	19,3	9,7
3,47	3,28	2,53	3,42	3,0	1,87	2,72	1,7
0,42	0,38	1,0	0,63	0,42	0,14	0,17	0,17
(30—100)	(20—400)	(0—657)	(0—900)	(0—1000)	(20)	(0—2000)	(20)
—	1024	658	1536	1430	—38,9	3380	73
740	1200	310	290	970	610	370	380
7,0	13	2,04	7,1	58	75	3,9	41

[4]) Средняя величина, рассчитанная из выражения (4.69) в том же температурном интервале, что и $\bar{c}_\rho$.

(например, железа, нержавеющей стали, латуни), отклонение линейной зависимости от экспериментально наблюдаемой, как правило, не превышает $\pm 5\%$.

Следует заметить, что, как правило, измеряется температурная зависимость удельного сопротивления. Эти измерения дают, следовательно, величину (βc_v), так что значения β получаются делением на среднее значение удельной теплоемкости $\bar{c}_v = \bar{c}_\rho \bar{\rho}$. Однако и удельная теплоемкость $\bar{c}_\rho$ и массовая плотность ρ зависят от температуры (фиг. 10.2, п. 10.7), и эту зависимость в ряде случаев необходимо учитывать. Для большинства металлов в твердой фазе c_v изменяется в пределах $\pm 10\%$ от средней величины. Вместе со значениями σ_0 и β в табл. 10.IV приведены значения критического поля h_c и коэффициенты магнитной диффузии $\varkappa_0$, рассчитанные по соотношениям (4.69) и (3.6) соответственно.

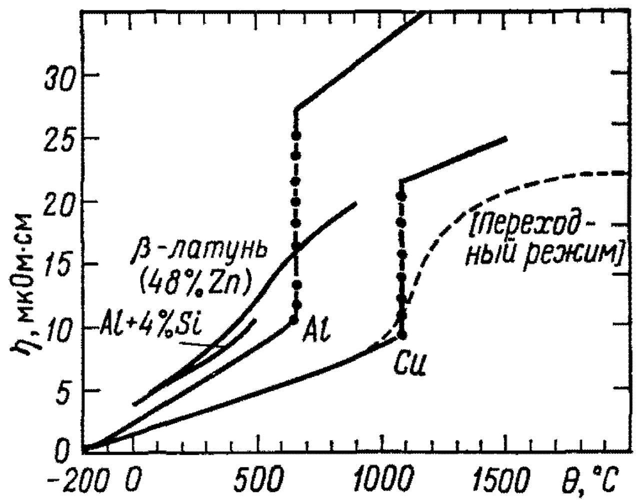
10.43. Помимо температуры, электропроводность зависит и от ряда других физических величин. Здесь будут рассмотрены только



Фиг. 10.19. Удельное сопротивление η меди как функция теплосодержания $Q = \int c_v d\theta$, измеренная в квазистатических условиях.

Пунктирная кривая (L) — линейная экстраполяция уравнения (10.69) при использовании параметров, приведенных в табл. 10.IV. (Кривая получена из данных, приведенных на фиг. 10.20, в табл. 10.IV и в работе [10.7].)

давление и магнитное поле, так как их влияние на механизм проводимости может быть существенным при анализе стоящих перед нами задач.



Фиг. 10.20. Температурная зависимость удельного сопротивления электролитических меди и алюминия, латуни и сплава алюминия с кремнием, измеренная в квазистатических условиях.

В переходном режиме (см. [4.9]) температурный интервал 500—2000 °C записывается примерно за 2 мкс. (Кривые до точки плавления взяты из [10.8], а для жидкой фазы — из [10.7].)

Так как при высоком давлении уменьшается амплитуда колебаний решетки, можно ожидать, что с ростом давления будет возрастать и проводимость. В пп. 10.14 и 10.15 было показано, что

$$\Gamma = -\frac{d \ln \langle v \rangle}{d \ln V} \approx \frac{d \ln \Theta_D}{d \ln V}; \qquad (10.71)$$

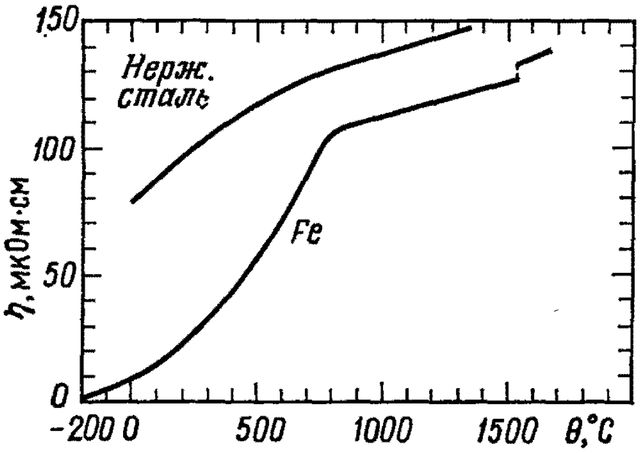
отсюда имеем

$$\frac{\Theta_D}{\Theta_{D_0}} \approx \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-1/2\alpha},$$

где $1/2\alpha \approx \Gamma$. Используя (10.56), получаем

$$\sigma \sim \frac{1}{\Theta} \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\alpha}.$$

Для учета эффекта сжимаемости закон изменения проводимо-



Фиг. 10.21. Температурная зависимость удельного сопротивления электролитического железа и нержавеющей стали, измеренная в квазистатических условиях.

Кривая для Fe взята из [10.7, 10.8], для AISI 304 любезно предоставлена Р. Луппи.

сти (10.69) можно переписать в виде

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1+\beta Q} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha}, \qquad (10.72)$$

где $\rho = 1/V$ — плотность, а коэффициент α, экспериментально определенный для меди, приведен в табл. 10.II.

10.44. Если металл находится в магнитном поле H, то электроны проводимости между соударениями движутся по круговым (или спиральным) орбитам с *ларморовским радиусом*

$$r_L = \frac{m \langle v \rangle}{\mu_0 H e}. \qquad (10.73)$$

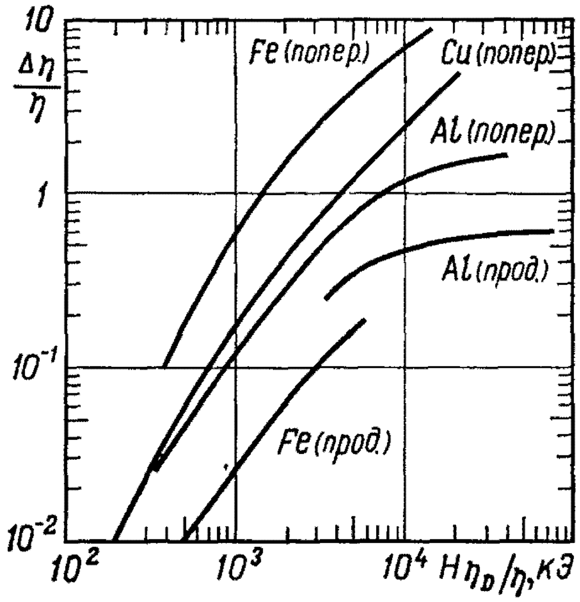
Качественные соображения позволяют ожидать, что относительное увеличение удельного сопротивления $\Delta\eta/\eta$, обусловленное магнитным полем, будет функцией λ_e/r_L или H/η, так как, используя равенства (10.66) и (10.67), получаем

$$\frac{\lambda_e}{r_L} = \frac{2}{n_e e} \frac{\mu_0 H}{\eta}.$$

Теоретические рассмотрения, проведенные в работе [10.3], показывают, что

$$\frac{\Delta\eta}{\eta}=f\left(\frac{H}{\eta}\right), \tag{10.74}$$

где η — удельное сопротивление при нулевом поле, а f — функция, характеризующая металл и зависящая от относительного направления поля и тока. Экспериментальные результаты приведены на фиг. 10.22. Заметим, что для меди при 20 °С и магнитном поле 1 МЭ $\Delta\eta/\eta \approx 20\%$, а при 1000 °С (омический нагрев!) и таком же поле возрастание относительного удельного сопротивления падает



Фиг. 10.22. Увеличение удельного сопротивления $\Delta\eta$ в поликристаллических металлах в результате гальваномагнитных эффектов в продольном и поперечном полях (из данных, приведенных в [10.3]).

η — удельное сопротивление при нулевом поле (при данной температуре); η_D — удельное сопротивление при дебаевской температуре Θ_D. Отметим, что $\theta_D = 40$ °С для Cu, 140 °С — для Al и 80 °С — для Fe; величина η_D может быть определена из кривых на фиг. 10.20 и 10.21.

примерно до 1%. Следовательно, эффект зависимости сопротивления от магнитного поля в задачах, связанных с диффузией магнитного поля, обычно пренебрежимо мал.

10.45. Расчеты электронной теплопроводности, проведенные на основе статистики Ферми — Дирака [10.17], приводят к выражению для теплопроводности

$$\lambda=\frac{1}{3}\pi^2k^2\Theta\frac{n_e}{m_e}\tau. \tag{10.75}$$

Комбинируя это выражение с соотношением (10.66), можно получить закон Видемана — Франца

$$\frac{\lambda}{\sigma\Theta}=L, \tag{10.76}$$

где $L = \pi^2 k^2/3e^2 = 2{,}45\cdot 10^{-8}$ Вт·Ом/(°C)^2 — постоянная Лоренца. (Точное значение для меди приведено в табл. 10.II.) Учитывая равенство (10.68), можно, например, показать, что теплопроводность не зависит от температуры.

Проводимость жидкости, пара и плазмы

10.46. Уменьшение электропроводности при плавлении обнаружено для большинства металлов (табл. 10.V, фиг. 10.20 и 10.21). Этот эффект связан с уменьшением среднего свободного пробега электронов, обусловленным дополнительным «беспорядком» в жидкости. Однако при быстром разогреве, вызванном диффузией магнитного поля, в жидкости за столь короткие промежутки времени не успевает установиться квазистатической структуры, поэтому следует ожидать, что уменьшение проводимости будет не так ярко выражено, как в случае установившегося квазистатического состояния (фиг. 10.20).

10.47. Когда температура проводника за счет омического нагрева превысит температуру кипения, его поверхность вскипает; плотный пар расширяется и, постепенно ионизуясь, переходит в состояние плазмы с высокой проводимостью. Изучение свойств электропроводности и вообще коэффициентов переноса при переходе из одной фазы в другую является весьма трудной задачей. Практически эта задача решается простым использованием эмпирических законов (см., например, [1.30]). Следуя работе [1.109] и основываясь на некоторых простейших рассмотрениях, попытаемся привести оценки важнейших физических эффектов, определяющих электропроводность.

Рассмотрим лоренцеву плазму, в которой ионы (с плотностью n_i) можно представить как фиксированные точечные заряды с зарядом Ze; плазма предполагается квазинейтральной, т. е. $n_e = Zn_i$. Будем предполагать, что электрон рассеивается ионом тогда, когда он подходит к нему на такое расстояние a, что потенциальная энергия электрона в кулоновском поле становится равной начальной средней кинетической энергии $\langle W_K\rangle = {}^1/_2 m_e \langle v\rangle^2$, определяемой средней скоростью дрейфа $\langle v\rangle$, введенной в п. 10.39, т. е.

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \langle W_K\rangle. \qquad (10.77)$$

Следовательно, средняя длина свободного пробега электрона будет

$$\lambda_e = \frac{1}{n_i \pi a^2} \approx \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2 \langle W_K\rangle^2}{n_i \pi Z^2 e^4},$$

ТАБЛИЦА 10.V

Параметры металлических проводников при температуре выше точки плавления [1])

Параметр	Единицы	Медь (электролитическая)	Al (99,5%)	Железо (электролитическое)	Сплав Вуда	Hg	Na
Проводимость (при θ_m °C) σ_l	10^6 (Ом·м)$^{-1}$	4,7	5,0	0,7	1,15	1,1	10,4
Температурный коэффициент ($\beta_l c_\rho \rho_l$) [2])	10^{-3} (°C)$^{-1}$	0,38	0,53	—	8,7	—	3,2
Изменение проводимости σ_l/σ_s (при θ_m)	—	0,48	0.61	0,92	0,74	~0,25	0,7
Массовая плотность ρ_l (при θ_m)	10^3 кг/м^3	8,32	2,38	6,88	—	~13,7	0,928
Теплоемкость c_ρ	10^3 Дж/кг (°C)	0,47	1,08	0,79	—	0,137	1,35
средняя в температурном интервале	°C	(1083—1500)	(660—1000)	(1550—2000)	—	(0—300)	(100—350)
Температура плавления θ_m	°C	1083	658	1536	73	—38,9	97,8
Температура кипения θ_b (1 бар)	°C	2500	2450	3070	—	357	883
Скрытая теплота плавления	10^6 Дж/кг	0,21	0,38	0,27	—	0,0117	0,113
Скрытая теплота испарения	10^6 Дж/кг	4,7	10,5	—	—	0,292	4,2
Теплота сублимации (от 0 °C)	10^6 Дж/кг	5,6	12,1	7,5	—	—	—

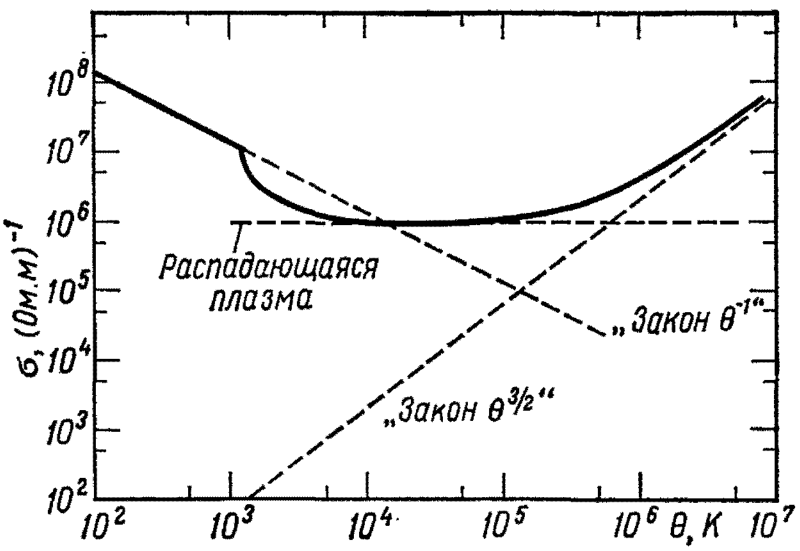
1) Из работ [10.7, 10.8]; некоторые данные для Al, Hg, Na взяты из работы [10.9].

2) По аналогии с уравнением (10.69) вблизи точки плавления можно записать $\sigma = \sigma_l [1+\beta_{lcv}(\theta-\theta_m)]^{-1}$.

а проводимость, согласно соотношениям (10.66) и (10.67), равна

$$\sigma \approx \frac{8\pi\varepsilon_0^2 \langle W_K \rangle^{3/2}}{\sqrt{2m_e}\, Ze^2}. \tag{10.78}$$

Рассмотрим два предельных случая. При температурах существенно ниже температуры Ферми (10.8) электронный газ (частично) вырожден и энергия свободных электронов примерно равна



Фиг. 10.23. Приблизительное поведение проводимости меди в зависимости от температуры [1.103].

средней энергии Ферми (10.10). В этом случае для проводимости из выражений (10.10) и (10.78) получим постоянную величину

$$\sigma \approx 8{,}35 \frac{\varepsilon_0^2 h^3}{m_e^2 e^2} \frac{n_e}{Z}. \tag{10.79}$$

В другом крайнем случае при очень высоких температурах $\langle W_K \rangle^{3/2} \sim (k\Theta)^{3/2}$, что приводит к известному «закону $\Theta^{3/2}$» для проводимости плазмы [10.157]. Два последних приближения приведены на фиг. 10.23 для $n_i \approx 10^{23}$см$^{-3}$. Как и следовало ожидать, реальная проводимость приблизительно описывается сплошной кривой, приведенной на этом же графике, и всегда остается больше примерно 10^6 См/м.

Одиннадцатая глава Измерение импульсных магнитных полей и токов

§ 1. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ПОЛЕЙ

11.1. В принципе любой физический эффект, зависимость которого от магнитного поля хорошо известна, может быть использован для измерения магнитного поля. Действительно, количество методов, используемых для измерения магнитных полей, весьма велико (см., например, [11.1, 11.4, 11.7]). Однако лишь некоторые из них представляют практический интерес при измерении импульсных полей. Это ограничение обусловлено отчасти преимущественным использованием индуктивных магнитных датчиков, которые, как будет показано в 11.13, в случае исследования импульсных процессов очень просты, дешевы и обеспечивают необходимую точность. Кроме того, многие методы, используемые для измерения постоянных магнитных полей, неприменимы при исследованиях импульсных полей вследствие неудовлетворительных частотных характеристик. Например, прекрасный *метод ядерного магнитного резонанса* (ЯМР), который в случае постоянного однородного магнитного поля позволяет производить абсолютные измерения с высокой точностью (10^{-4}—10^{-6}), неприменим, если скорость нарастания поля превышает 10 кЭ/с [11.1].

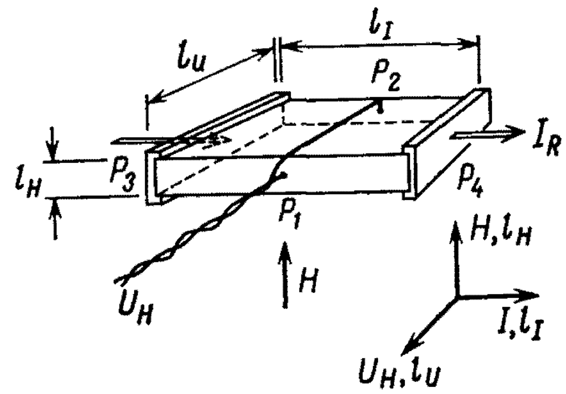
Прежде чем приступить к рассмотрению индуктивных магнитных датчиков (п. 11.13), которым в данной главе будет уделено основное внимание, остановимся на некоторых не столь часто используемых методах.

Холловский датчик

11.2. Известно, что если пластину, по которой течет ток, поместить в магнитное поле, то в поперечном направлении пластины возникнет разность потенциалов (эффект Холла). Устройство холловского датчика схематично показано на фиг. 11.1. Если направления тока I_R, магнитного поля H и возникающей разности потенциалов U_H взаимно перпендикулярны, то холловское напряжение равно

$$U_H = \frac{R_H}{l_H} I_R B = \frac{R_H}{\eta} \frac{l_U}{l_I} U_R B, \qquad (11.1)$$

где R_H — *постоянная Холла* (табл. 11.I); I_R — ток через пластину; $B = \mu H$ — магнитная индукция; U_R — приложенное к пластине напряжение; η — удельное сопротивление и l_I, l_H, l_U — размеры



Фиг. 11.1. Датчик Холла.

пластины вдоль направлений d, H, U_H. (Заметим, что электроды P_1 и P_2 должны располагаться вдоль эквипотенциальных линий, чтобы избежать омического падения потенциала.)

ТАБЛИЦА 11.I

Постоянная Холла при комнатной температуре [11.1; 11.7]

Материал	R_H м³/с·А	η Ом·м	R_H/η (тесла)$^{-1}$	R_H/η (гаусс)$^{-1}$
Cu	$5{,}2\cdot10^{-11}$	$1{,}7\cdot10^{-8}$	$3\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-7}$
Ge (n-типа)	$3{,}6\cdot10^{-2}$	0,1	0,36	$3{,}6\cdot10^{-5}$
Bi	$1\cdot10^{-6}$	$1{,}1\cdot10^{-6}$	0,9	$9\cdot10^{-5}$
InSb	$2{,}4\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-5}$	4	$4\cdot10^{-4}$
InAs	$1\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-5}$	2	$2\cdot10^{-4}$

Поскольку холловское напряжение пропорционально приложенному магнитному полю, этот эффект может быть использован для измерения магнитного поля. Простое соотношение (11.1) является первым приближением, так как различные эффекты вносят нелинейные отклонения (например, температурная зависимость величин R_H и η (п. 10.42), эффект зависимости сопротивления от магнитного поля (п. 10.44), проблемы контактов и т. д. [11.1]). Тем не менее в диапазоне от 0,1 до 10 кЭ с помощью этого метода может быть легко достигнута точность порядка нескольких процентов.

11.3. Для успешного использования холловских датчиков в случае импульсных полей требуется, чтобы длительность импульса поля значительно превышала а) время диффузии магнитного поля в датчик, $\tau_d \approx \mu_0 l^2/\eta$; б) время релаксации τ_r (см. п. 10.33) для рассеяния носителей (электронов и дырок в полупроводниках), от которых зависит эффект Холла.

Для типичного полупроводника InAs $\tau_r \approx 10^{-11}$ с, а при $l = 0{,}05$ см получаем $\tau_d \approx 6 \cdot 10^{-9}$ с; следовательно, исходя из простых физических соображений, можно считать, что собственные частоты датчика Холла превышают 100 МГц. Фактически частотные ограничения обусловлены рядом других факторов, таких, как разрешающее время измерительной цепи или индуктивная наводка на подводы к датчику. Действительно, если, например, площадь петли, образованной подводами, составляет 1 мм^2, а скорость нарастания поля равна 10^{11} Э/с, то наведенное напряжение равно 10 В, т. е. при измерении быстро изменяющихся полей для большинства электрических измерительных систем наводки легко могут стать сравнимыми с основными сигналами.

11.4. Чувствительность холловского датчика зависит от тока I_R, величина которого в случае работы с постоянным током обычно не превышает 100 мА. Впрочем, и величина произведения $I_R^2 \cdot \tau$, где τ — длительность импульса, также ограничена максимально допустимой температурой. В импульсном режиме можно использовать токи до 10 А длительностью 10...50 мкс, что позволяет достигать относительно высоких чувствительностей [11.11].

Обычно размеры холловского датчика составляют $l_H \approx 0{,}1$ мм, $l_I \approx 10$ мм, $l_v = 5$ мм, но в случае необходимости поверхность датчика может быть уменьшена до нескольких квадратных миллиметров, что дает возможность получить при измерении полей относительно хорошее пространственное разрешение.

11.5. По сравнению с наиболее широко используемыми индуктивными магнитными датчиками (см. п. 11.13) холловские датчики имеют следующие преимущества:

а) измерения (напряжения) позволяют производить прямой отсчет в единицах значения магнитного поля;

б) чувствительность метода, которая может изменяться для данного датчика простым изменением I_R, не зависит от длительности импульса (частоты) и может достигать относительно высоких значений ($\sim$5 В/кЭ).

С другой стороны, необходимо учитывать и следующие недостатки:

в) холловские датчики относительно дороги и сложны в изготовлении;

г) для их работы требуется хорошо стабилизованный и калиброванный источник тока I_R.

д) во избежание нелинейных эффектов ток I_R и температура датчика должны поддерживаться строго постоянными;

е) наличие дополнительного кабеля для тока I_R усложняет проблемы экранировки.

В заключение следует отметить, что, как показывает опыт, использование холловских датчиков имеет смысл только в случае низких частот (обычно $\leqslant 10$ кГц), когда чувствительность индукционных датчиков (см. п. 11.22) относительно низка или когда необходимо измерять одновременно медленные и быстрые изменения поля.

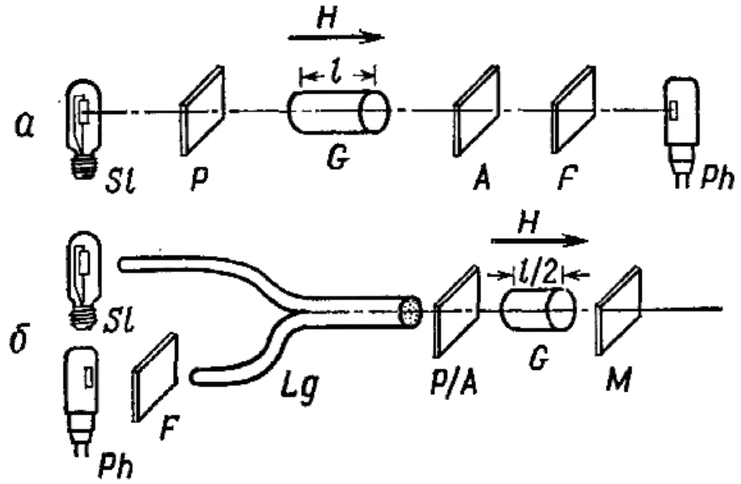
Датчики, использующие эффект зависимости удельного сопротивления от магнитного поля

11.6. Диагностические методы, основанные на *зависимости сопротивления от магнитного поля* (см. п. 10.44), используются для исследования постоянных полей. Например, удельное сопротивление висмута (который давно и наиболее часто используется для этой цели) при комнатной температуре увеличивается вдвое в поле 20 кЭ (при низких температурах удельное сопротивление возрастает даже более значительно). Для недавно разработанных анизотропных полупроводников типа InSb + NiSb этот эффект примерно на порядок выше, чем в висмуте [11.20].

11.7. Устройство такого датчика аналогично устройству холловского, показанного на фиг. 11.1, за исключением того, что измеряемое напряжение снимается с двух электродов P_3 и P_4. Технические трудности и ограничения, связанные с использованием этих датчиков, отчасти аналогичны рассмотренным в пп. 11.3 и 11.5. Так, например, оба условия, отмеченные в п. 11.3, должны быть проверены перед использованием датчика в импульсном режиме. Чтобы избежать больших ошибок при измерениях, нагрев, обусловленный вихревыми и основным токами, должен быть мал. Основная трудность измерения быстро меняющихся полей также связана с индуктивными наводками на петлю, образованную подводами. В заключение следует отметить, что нелинейная зависимость удельного сопротивления полупроводников от магнитного поля, во всяком случае, для полей до 10...20 кЭ требует проведения тщательной калибровки датчиков.

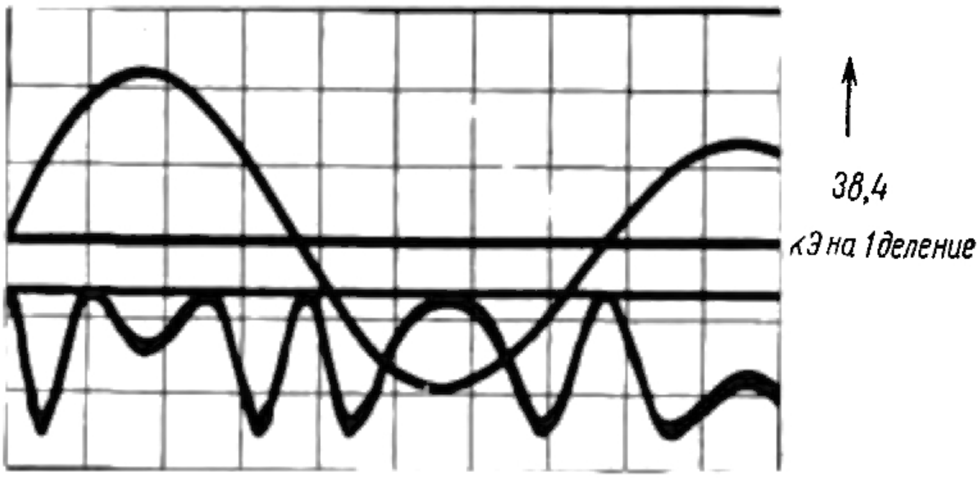
Оптические методы

11.8. В этом пункте основное внимание будет уделено *эффекту Фарадея*, хотя в п. 11.12 сделаны некоторые замечания и об *эффекте Зеемана*. Диагностические методы, основанные на этих двух

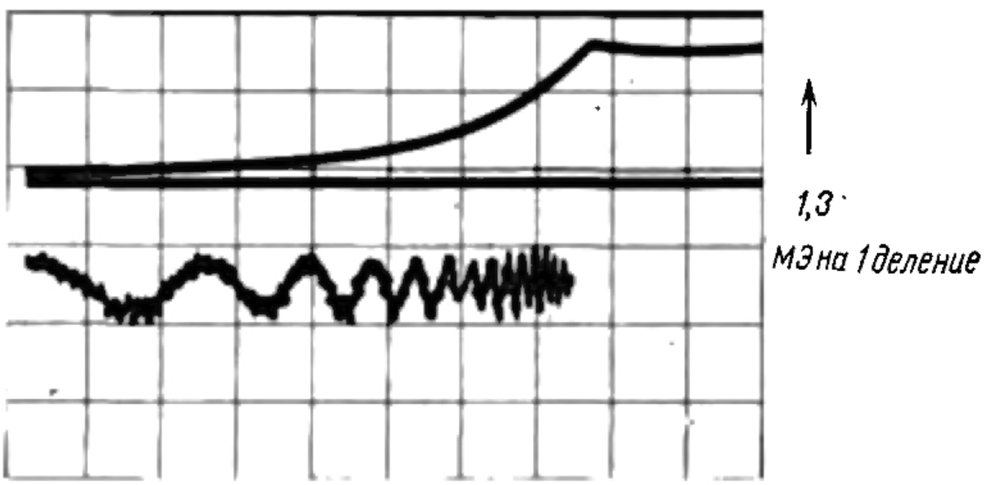


Ф и г. 11.2. Принципиальные схемы двух типов датчиков Фарадея.

а — датчик, работающий на прохождение; *б* — датчик, работающий на отражение; *Sl* — ртутная лампа; *Ph* — фотоэлектронный умножитель; *Lg* - световод; *P*, *A* — соответственно поляризатор и анализатор; *F* — фильтр; *G* — стеклянный образец.



а



б

Ф и г. 11.3. Сигналы фарадеевских датчиков (нижние лучи) различных систем и их сравнение с сигналами (интегрированными) от индуктивных датчиков [11.21].

а — система, работающая на пропускание (фиг. 11.2,*а*); образец — кювета с ацетоном длиной 8 см внутри однослойного соленоида ($\varphi_{\text{макс}} = 220°$; $H_{\text{макс}} = 83$ кЭ); *б* — система, работающая на отражение (фиг. 11.4) во взрывомагнитном генераторе сверхсильного поля ($\varphi_{\text{макс}} = 2790°$; $H_{\text{макс}} = 2$ МЭ).

эффектах, имеют то преимущество, что в область поля не вводится никаких электрических цепей (следовательно, исключаются неопределенности и ошибки, особенно при измерении сверхвысоких полей). Кроме того, оптические методы отличаются очень высокими частотными характеристиками, хорошей точностью (1...5%) и требуют относительно простых экспериментальных установок.

11.9. Под эффектом Фарадея мы понимаем поворот на угол φ плоскости поляризации светового луча, проходящего через однородную и изотропную среду, помещенную в магнитное поле H:

$$\varphi = \nu_V l H, \qquad (11.2)$$

где l — длина оптически активной среды [предполагается, что луч параллелен линиям поля (фиг. 11.2)]. Используя простую теорию дисперсии [11.14], получаем выражение для *постоянной Верде*

$$\nu_V = \text{const} \cdot \frac{\omega^2}{n} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - (\mu H e \omega / m_e)^2}, \qquad (11.3)$$

где e и m_e — соответственно заряд и масса электрона; ω_0 — характеристическая частота (электронов) среды и n — коэффициент преломления, который может быть представлен в виде

$$n^2 - 1 = \text{const} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (11.4)$$

(величины «const» в двух последних соотношениях — постоянные среды, не зависящие от H и ω).

Из соотношений (11.2) и (11.3) видно, что угол φ линейно зависит от H только при

$$H \ll H_{\text{крит}}. \qquad (11.5)$$

Критическое поле $H_{\text{крит}}$ определяется из соотношения

$$\left(\frac{\mu_0 H_{\text{крит}} e}{m_e} \omega\right)^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2.$$

Для диэлектриков, для которых ω_0 лежит в ультрафиолетовой области, и в случае использования видимой области спектра критическое поле существенно выше 100 МЭ. Однако для некоторых проводников и полупроводников вклад нелинейной составляющей эффекта Фарадея может проявляться даже при полях ниже 1 МЭ [11.16].

11.10. Типичная экспериментальная установка схематически показана на фиг. 11.2, *а*. Поляризованный пучок света от ртутной лампы проходит через поляризатор, образец и анализатор. Интенсивность модулированного света, выходящего из анализатора, определяется *законом Малюса*:

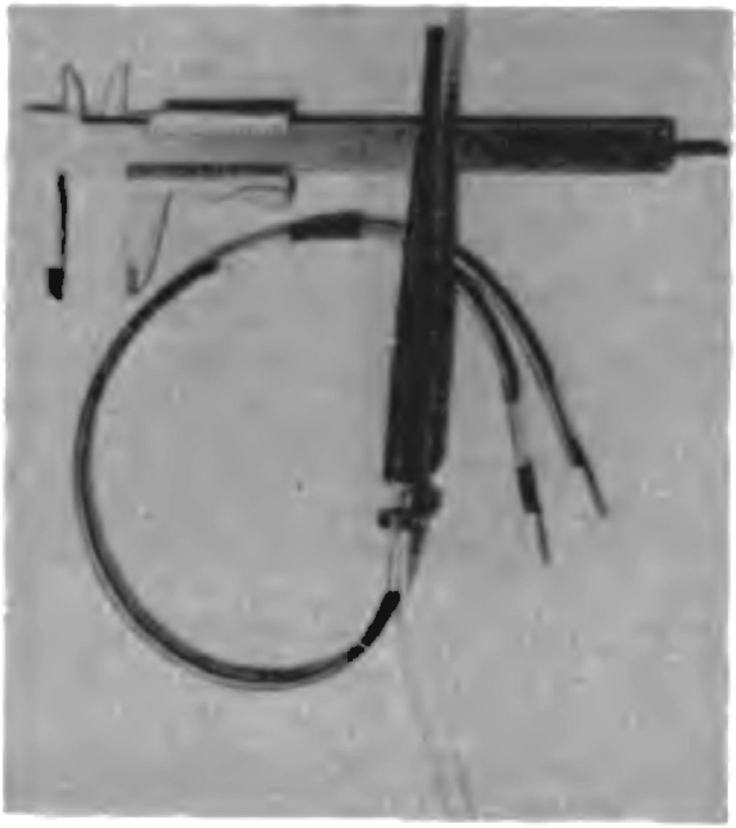
$$I = I_0 \cos^2 \varphi.$$

Свет преобразуется фотоумножителем в электрические импульсы, регистрируемые на экране осциллографа (фиг. 11.3). Полный угол поворота (в градусах) определяется из соотношения

$$\varphi(t) = 180\left[\alpha + \arccos\sqrt{\frac{I(t)}{I_0}}\right],$$

где α — число полных полупериодов, а I/I_0 — отношение амплитуд сигнала фотоумножителя (конечно, при условии линейной работы фотоумножителя).

В методе с отражением (фиг. 11.2, *б*), который исторически был использован еще Фарадеем, пучок света после прохождения



Фиг. 11.4. Компактный фарадеевский датчик, работающий на отражение, с чувствительным объемом (кварцевый образец) длиной 0,5 см и диаметром 0,4 см.

На фото видны два (черных) световода и два (светлых) кабеля, соединенные с двумя индуктивными датчиками магнитного поля.

через образец отражается в него обратно и затем анализируется поляризатором. Этот принцип был использован при конструировании удобного и компактного датчика, показанного на фиг. 11.4.

Возможны и другие устройства для измерения эффекта Фарадея, которые также нашли практическое применение [1.155—1.157].

11.11. Точность измерения поля по эффекту Фарадея [см. соотношение (11.2)] определяется в значительной мере точностью константы Верде, поскольку в принципе можно добиться того, чтобы ошибки в измерении как l, так и φ (п. 11.10) составляли около 1%. Константа Верде зависит от состава материала

ТАБЛИЦА 11.II

Константы Верде при комнатной температуре [1])

Материал	ν_V, град/см·кЭ	
	$\lambda=4358$ Å (линия Hg)	$\lambda=5689$ Å (линия Na)
Стекла		
Кварц (стекло)	0,435	0,239
Крон	0,495	0,271
Крон (Ba)	0,675	0,370
Флинт (легкий)	0,97	0,530
Флинт (очень тяжелый)	2,70	1,480
Жидкости		
Бензол	0,925	0,506
Ацетон	0,365	0,200
Хлороформ	0,500	0,272
Сероуглерод	1,230	0,695

[1]) Данные, соответствующие линии Na, взяты из работ [10,56б; 11.13]; данные, соответствующие линии Hg, рассчитаны с помощью уравнения (11.6).

(табл. 11.II) и содержания примесей, которое обычно неизвестно (наиболее точные константы даются для некоторых жидкостей, так как их состав и чистота могут быть определены с достаточной степенью надежности). Это делает необходимым проведение калибровки диэлектрика, используемого в качестве датчика.

Другим источником ошибок является дисперсия константы Верде в случае, если падающий световой пучок не ограничивается достаточно узким интервалом длин волн $\Delta\lambda$, выделяемых соответствующим фильтром. Действительно, из (11.3) и (11.4), предполагая, что выполняется условие (11.5), получаем

$$\nu_V(\lambda) = \mathrm{const}\,\frac{(n^2-1)^2}{n}\,\frac{1}{\lambda^2}, \tag{11.6}$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны. Поскольку дисперсией коэффициентов преломления можно пренебречь (например, для крона $n = 1{,}532$ при $\lambda = 4046$ Å и $n = 1{,}514$ при $\lambda = 6708$ Å), получаем, что

$$\frac{\Delta\nu_V}{\nu_V} = -2\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

т. е. величина $\Delta\lambda$ обычно должна быть меньше 100 Å.

11.12. Другой оптический метод измерения сильных магнитных полей основан на эффекте Зеемана [1.156]. Известно, что линии излучения (или поглощения) атомов, находящихся в магнитном поле, расщепляются. Например, если спектральный источник света излучает параллельно линиям поля, то синглетные линии расщепляются на две (*нормальный эффект Зеемана*), каждая из которых сдвинута от первоначальной длины волны на

$$\Delta\lambda \approx 4{,}67 \cdot 10^{-13}\lambda^2 H \tag{11.7}$$

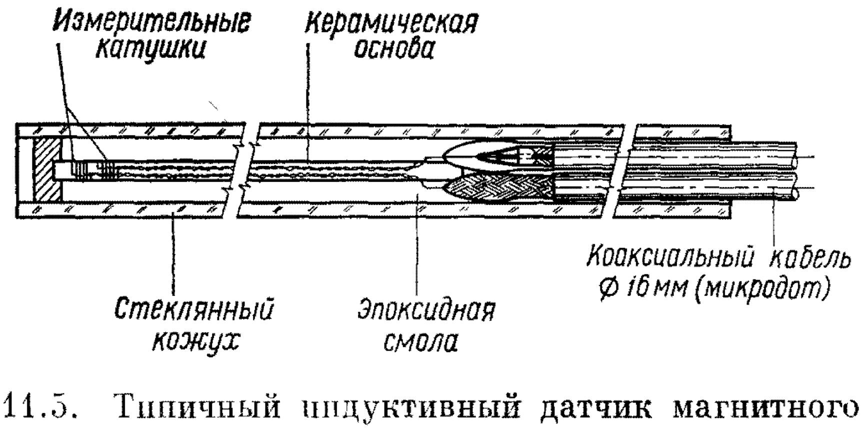
(λ — в ангстремах, H — в эрстедах). Чаще встречается *аномальный эффект Зеемана*, который характерен для мультиплетов и дает более сложную картину линий, но который никогда не был описан в деталях. В достаточно сильных полях расщепленные линии постепенно преобразуются в две линии нормального эффекта, так называемый эффект Пашена — Бака. (Пример расщепления D-линий Na в поле до 8 МЭ см. в [1.56].)

Эффект Зеемана сложнее использовать в качестве диагностического метода, чем эффект Фарадея. Он требует применения методов спектроскопии с временны́м разрешением, а датчиком должен служить пар или газ (в варианте поглощения) или излучающая плазма (в варианте излучения).

§ 2. ИНДУКТИВНЫЙ МАГНИТНЫЙ ДАТЧИК

Принцип действия

11.13. Наиболее распространенный метод измерения импульсных полей основан на использовании простой катушки связи,



Фиг. 11.5. Типичный индуктивный датчик магнитного поля.
Катушки и скрученные подводы выполнены из медной проволоки диаметром 0,1 мм в эмалевой изоляции. При изготовлении датчика минимальных размеров стеклянный контейнер не используется, но сам датчик заливается эпоксидной смолой и армируется стекловолокном.

в которой наводится э. д. с. (фиг. 11.5). Этот тип датчика мы обсудим более детально; будут рассмотрены его частотная характеристика и условия его использования в сверхсильных магнитных полях.

Когда соленоидальная катушка с эффективной поверхностью S помещается в изменяющееся во времени магнитное поле H, наведенное на ней напряжение $V_i(t)$ равно

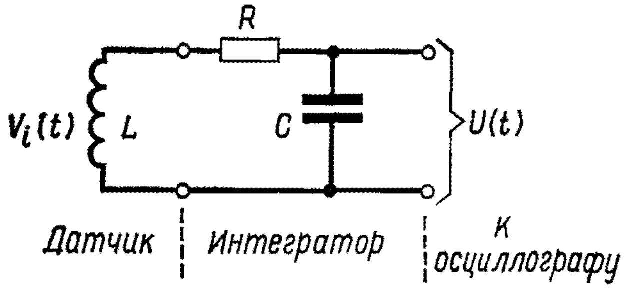
$$V_i(t) = S\mu_0 \frac{dH}{dt}. \qquad (11.8)$$

Заметим, что если катушка имеет N витков, площадь поперечного сечения каждого из которых равна A, а их оси расположены параллельно линиям поля, то можно написать

$$S = NA + S_a, \qquad (11.9)$$

где S_a — дополнительная площадь, образованная подводами и контактами; в тщательно изготовленной катушке величина S_a может составлять менее 1 мм^2.

11.14. Из соотношения (11.8) видно, что магнитное поле пропорционально $\int V_i\,dt$. Этот интеграл может быть определен



Фиг. 11.6. Индуктивный датчик с простым RC-интегратором.

из измеренных значений $V_i(t)$ либо численным или графическим интегрированием, либо непосредственно, если датчик соединен с баллистическим гальванометром или электронным интегратором. Например, если катушка подключена к простой RC-цепочке, как показано на фиг. 11.6, и если длительность импульса t_p мала по сравнению с постоянной времени интегрирования $\tau = RC$, то, как будет показано в п. 11.22,

$$\mu_0 H \approx \frac{\tau}{S} U, \qquad (11.10)$$

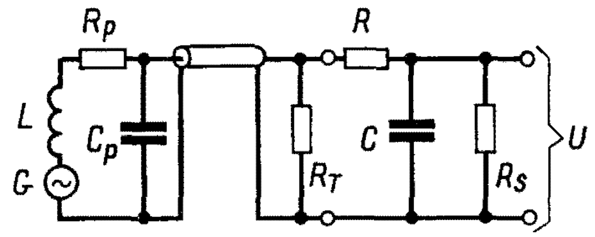
или, в практических единицах (Эв, В, с, см^2),

$$H \approx 10^8 \frac{\tau}{S} U, \qquad (11.11)^*$$

т. е. напряженность магнитного поля пропорциональна напряжению на конденсаторе U, которое может быть просто измерено и записано на экране осциллографа.

Частотная характеристика

11.15. В действительности цепь, соответствующая системе индуктивного датчика, значительно сложнее, чем приведенная на фиг. 11.6. С точки зрения ее высокочастотных характеристик она выглядит так, как показано на фиг. 11.7. Датчик (и соответствующие подводы и контакты) здесь включен в сопротивление R_P и емкость C_P. Выход датчика согласован с коаксиальным кабелем, который должен заканчиваться сопротивлением R_T, соответствующим его волновому сопротивлению, RC-интегратор



Фиг. 11.7. Полная схема цепи индуктивного датчика.

с высоким импедансом наиболее удобно располагать вблизи регистрирующего прибора (осциллографа), входное сопротивление которого R_S также учтено.

В работе [11.5] было экспериментально показано, что схема замещения, приведенная на фиг. 11.8, может быть использована для описания частотных характеристик индуктивного датчика, во всяком случае до частот порядка 30 МГц. Поскольку эта цепь важна и для других диагностических систем (пп. 11.21 и 11.35), она будет детально рассмотрена в двух последующих пунктах.

На фиг. 11.7 приведена полная схема замещения, описание которой сводится к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка и которая может быть проанализирована непосредственно [1]). К сожалению, использование большого числа

---

[1]) Анализ этой цепи состоит в следующем. Дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$G = A\frac{d^3U}{dt^3} + B\frac{d^2U}{dt^2} + D\frac{dU}{dt} + FU,$$

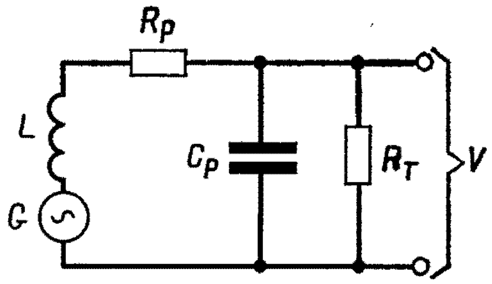
где

$$A = LC_PRC,$$

$$B = LC + LC_P\left(\frac{R}{R_S}\right) + LC_P + LC\left(\frac{R}{R_T}\right) + R_PC_PRC,$$

$$D = RC + RC\left(\frac{R_P}{R_T}\right) + R_PC_P + R_PC_P\left(\frac{R}{R_S}\right) +$$

параметров делает расчеты затруднительными и приводит к тому, что теряется очевидность зависимостей от многих важных параметров. Поэтому предпочтительнее обсудить цепь датчика (фиг. 11.8) отдельно от цепи интегратора (фиг. 11.14). Такая процедура возможна, если, как в большинстве случаев, датчик «видит» интегратор с очень высоким импедансом (что в большинстве практически реализуемых вариантов означает просто $R_T \ll R$).



Фиг. 11.8. Эквивалентная схема индуктивного датчика без интегратора

11.16. Цепь, изображенная на фиг. 11.8, описывается уравнением

$$LC_P \frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_T} + R_P C_P\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{R_P}{R_T} + 1\right) V = G. \qquad (11.12)$$

Здесь $G = V_i$ — напряжение, индуцированное в катушке [см. уравнение (11.8)].

Если временно пренебречь емкостью датчика ($C_P = 0$), то станут очевидными два экспериментально различных варианта использования датчика. Для одного, наиболее употребительного, имеем

$$\frac{L}{R_T}\frac{dV}{dt} \ll a^{-1}V,$$

где

$$a = \frac{R_T}{R_T + R_P} \qquad (11.13)$$

$$+ R_P C + \frac{L}{R_T} + LR_S + \frac{LR_S}{RR_T},$$

$$F = \frac{R_P}{R_S} + \frac{R_P}{R_T} + \left(\frac{R_P}{R_S}\right)\left(\frac{R}{R_T}\right) + \frac{R}{R_S} + 1.$$

Используя (11.8) с $G \equiv V_i$ и интегрируя, окончательно имеем

$$S\mu_0 H = DU + A\frac{d^2U}{dt^2} + B\frac{dU}{dt} + F\int U\,dt.$$

Таким образом, чтобы напряжение U было пропорционально полю H, необходимо предположить, что величины, определяющие коэффициенты A, B и F, малы по сравнению с D и т. д.

есть коэффициент ослабления по постоянному току; в терминах импеданса можно также написать

$$\omega L \ll R_T + R_P.$$

В этом случае, используя (11.8), получаем

$$V \approx aS\mu_0 \frac{dH}{dt}.$$

Заметим, что использованные условия нарушаются вблизи точки, где сигнал напряжения проходит через нуль, тогда как dV/dt остается конечной величиной. Ошибка, возникающая в измерениях после прохождения такой точки, может быть рассчитана, однако в большинстве случаев она пренебрежимо мала.

Во втором варианте используются противоположные условия, т. е., например,

$$\omega L \gg R_T + R_P.$$

Отсюда получаем

$$\frac{L}{R_T}\frac{dV}{dt} \approx S\mu_0 \frac{dH}{dt}.$$

В этом предельном случае находим, что выходной сигнал пропорционален величине магнитного поля (см. также п. 11.38). Заметим, что в этом случае датчик ведет себя как диамагнетик, т. е. магнитный поток вытесняется из его объема. Таким образом, датчик может вызвать заметные возмущения в первоначальном поле.

Прежде чем перейти к более детальному исследованию общей схемы датчика методом двух входных сигналов различной формы G, введем еще две безразмерные величины: *постоянную затухания*

$$k = \sqrt{a}\left[\frac{1}{2R_T}\sqrt{\frac{L}{C_P}} + \frac{1}{2} R_P \sqrt{\frac{C_P}{L}}\right] \tag{11.14}$$

и время

$$x = \frac{t}{\tau_P}, \tag{11.15}$$

где период τ_P определяется как

$$\tau_P = 2\pi\sqrt{(LC_P a)}. \tag{11.16}$$

11.17. В первую очередь исследуем характеристику этой цепи со ступенчатой входной функцией

$$G = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant 0, \\ G_0\,(\text{const}) & \text{при } t > 0. \end{cases} \tag{11.17}$$

Ищем решение (11.12) в виде

$$V = V_0 e^{px}. \tag{11.18}$$

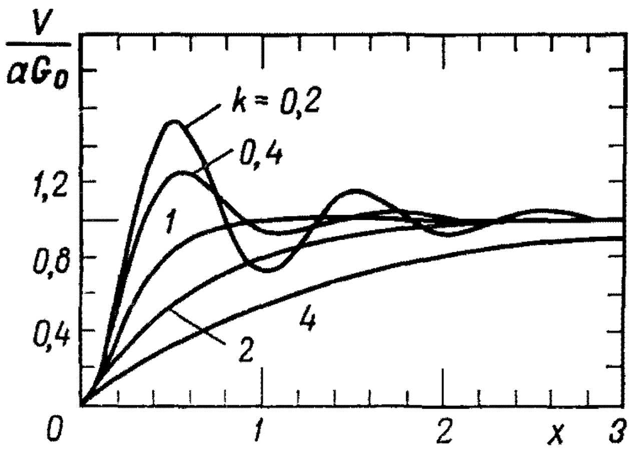
Подставляя значения параметров (11.13), (11.14) и (11.16), получаем из (11.12) характеристическое уравнение

$$p = -2\pi k \pm 2\pi \sqrt{(k^2-1)}. \qquad (11.19)$$

Полное решение получается обычным путем. После некоторых преобразований имеем три решения, соответствующие $k < 1$ (*недосогласованная осциллирующая цепь*), $k > 1$ (*пересогласованная цепь*) и $k = 1$ (*согласованная цепь*). Для последнего случая, например, используя (11.18) и (11.19), можно записать

$$V = aG_0 [1 - (1 + 2\pi x) e^{-2\pi x}]. \qquad (11.20)$$

Решения для двух других случаев получаются аналогично. На фиг. 11.9 приведены функция (11.20) и кривые, соответствующие двум пересогласованным и двум осциллирующим решениям.



Фиг. 11.9. Выходной сигнал цепи, изображенной на фиг. 11.8, при подаче на вход ступенчатого сигнала с амплитудой G_0.

Если определить *фронт* t_r как время, соответствующее изменению выходного сигнала от 0,1 до 0,9 конечного значения амплитуды для согласованной цепи, то из (11.20) следует

$$t_r = 0{,}53\tau_P = 3{,}35 \sqrt{aLC_P}. \qquad (11.21)$$

Отсюда можно сделать вывод, что разумная характеристика (с точки зрения как уменьшения амплитуды, так и деформации формы импульса) для входного импульса длительностью t_p получается при $t_p \gg 0{,}5\tau_P$ и что режим с $k \approx 1$ предпочтителен.

11.18. Завершим наш анализ цепи, приведенной на фиг. 11.8, исследованием ее характеристик с синусоидальным входным сигналом

$$\widetilde{G} = G_0 e^{i\omega t}. \qquad (11.22)$$

Будем искать решение в виде

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}_0 e^{i\omega t} = |V_0| e^{i(\omega t + \varphi)}; \qquad (11.23)$$

подставляя его в (11.12), получаем

$$\frac{\widetilde{V}}{\widetilde{G}}=\frac{R_T}{(R_T+R_P-\omega^2 R_T L C_P)+i\omega(L+R_P R_T C_P)}=\widetilde{f}. \tag{11.24}$$

Используя параметры (11.13), (11.14), (11.16) и вводя безразмерную частоту

$$y=\frac{\omega}{2\pi/\tau_P}=\frac{\tau_P}{T}, \tag{11.25}$$

имеем при $\widetilde{f}=f_1+if_2$ на выходе амплитуду

$$|\widetilde{f}|=\sqrt{f_1^2+f_2^2}=\frac{|V_0|}{G_0}=\frac{a}{\sqrt{\{(1-y^2)^2+4y^2k^2\}}}, \tag{11.26}$$

и сдвиг фазы

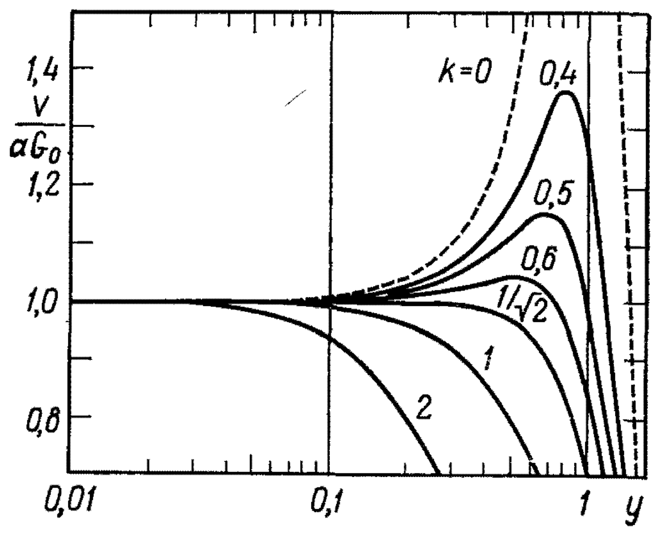
$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{f_2}{f_1}=-\operatorname{arctg}\frac{2yk}{1-y^2} \tag{11.27}$$

(см. фиг. 11.10 и 11.11); кривые (11.25) имеют резонанс (максимум) при

$$y_m=\sqrt{1-2k^2}, \tag{11.28}$$

но лишь при условии $k<1/\sqrt{2}$.

Следовательно, отклик цепи на установившийся входной сигнал вида (11.24) можно считать удовлетворительным (во всяком случае, в отношении амплитудной характеристики) только



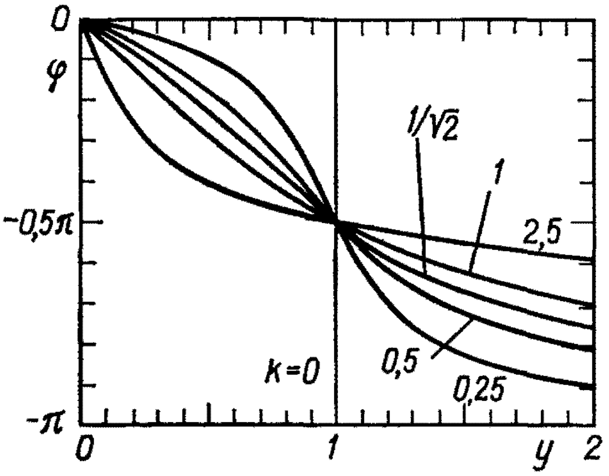
Фиг. 11.10. Кривые ослабления для установившегося синусоидального входного сигнала.

тогда, когда а) $y \ll y_m$, б) и, возможно, $k\approx 1/\sqrt{2}$, так как для этой величины k кривые ослабления имеют наиболее протяженную плоскую часть.

Из фиг. 11.11 видно, что в этих условиях невозможно добиться сдвига фазы $\varphi\approx 0$. Тем не менее вблизи кривой, соответствующей

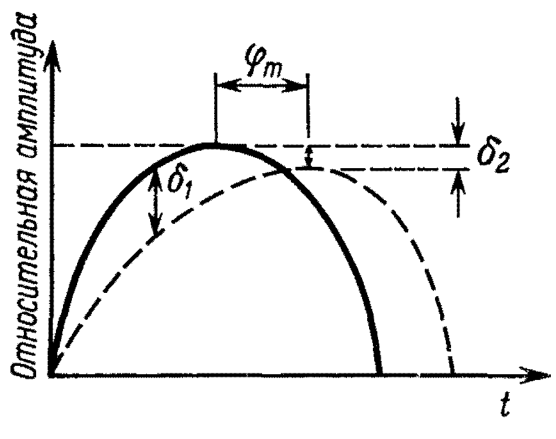
$k = 1/\sqrt{2}$, можно приближенно считать $\varphi/\omega = \text{const}$. Так как выходной сигнал пропорционален $\exp[i\omega(t + \varphi/\omega)]$, то выходной сигнал будет смещен по фазе относительно входного на φ/ω, но без заметных амплитудных искажений.

11.19. Результаты двух предыдущих пунктов можно суммировать, отметив, что выходной сигнал индуктивного датчика



Фиг. 11.11. Фазовый сдвиг для установившегося входного сигнала.

(даже при идеальном интегрировании) будет искажен по сравнению с импульсом поля. Полуколичественное рассмотрение искажений для импульса любой формы может быть проведено



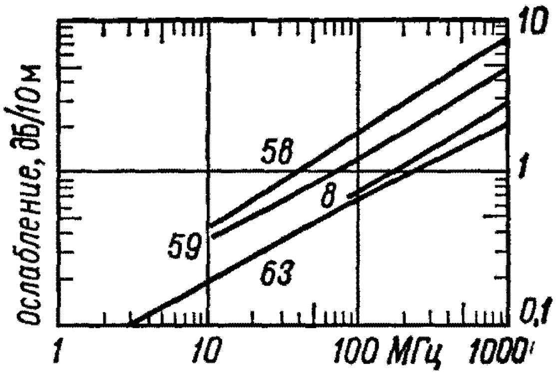
Фиг. 11.12. Сравнение измеренного магнитного поля (пунктирная линия) с реальным полем (сплошная линия).

Величины δ_1, δ_2, φ_m, соответствующие синусоидальному полю и зависящие от различных параметров цепи, можно найти, например, в [11.15].

при тщательном анализе уравнений, полученных для двух рассмотренных примеров. Сложность этого анализа определяется теми параметрами измеряемого импульса поля, которые наиболее существенны в данном эксперименте (фиг. 11.12): максимальные искажения δ_1, смещение максимума по фазе φ_m или ослабление максимума δ_2.

Во всяком случае, полученные результаты показывают, что для достижения наилучшей частотной характеристики период τ_P (11.16) должен быть как можно короче. Практически это условие означает малые L, т. е., согласно формуле для однослойного соленоида (П1.13), величина N^2A/l должна быть малой. Поскольку обычно требуются также хорошая чувствительность (значение NA велико) и хорошее пространственное разрешение (A и l малы), то в соответствии со специфическими требованиями эксперимента необходимо искать разумный компромисс.

Пример. Рассмотрим типичный индуктивный датчик, используемый в плазменных исследованиях при полях до 50 кЭ: 60 витков медной проволоки диаметром 0,04 мм в виде катушки



Фиг. 11.13. Ослабление в стандартных коаксиальных кабелях с различным волновым сопротивлением.

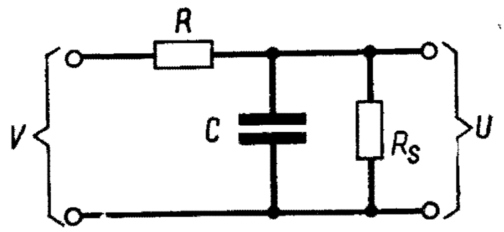
Тип RG-8U, 50 Ом; RG-58A/U, 50 Ом; RG-59/U, 70 Ом; RG-63/U, 125 Ом.

длиной 1 мм с внешним диаметром 0,7 мм. Параметры ее цепи: $L = 1{,}14$ мкГ, $C_P = 15{,}5$ пФ, $R_P = 21$ Ом. Тогда параметр, определяющий ослабление по кривой на фиг. 11.10, будет $R_T \approx \approx 135/k$ Ом, а приведенная частота $\nu = 38y$ (МГц). Видно, что для получения разумной частотной характеристики необходимо использовать кабель с относительно высоким волновым сопротивлением. Действительно, например, для $R_T = 197$ Ом кривая ослабления на фиг. 11.10 остается плоской с точностью несколько процентов вплоть до частот 20 МГц. Используя выражение (11.21), для времени нарастания получаем $t_r \approx 0{,}014$ мкс. Выбранная цепь будет недосогласована ($k < 1$). Заметим, что если учесть высокий импеданс интегратора, то необходимо оценивать ослабление (интегрированного) сигнала, используя для емкости значение $(C_P + C)$.

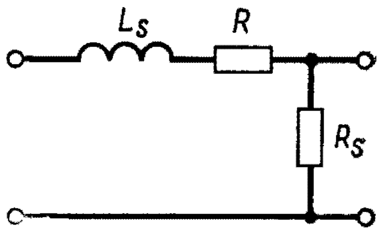
11.20. Коаксиальный кабель, соединяющий датчик с интегратором и осциллографом (фиг. 11.7), даже если он нагружен на хорошо подобранное сопротивление R_T, будет также искажать и ослаблять сигнал. В работе [11.18], например, непосредственно учтен вклад соединительных элементов в общие характеристики цепи. В действительности этот эффект становится существенным при длинах кабеля более 10 м — ситуация, с которой часто сталкиваются при работе с сильными магнитными полями. Не вдаваясь в детали (более подробная информация приведена в [3.5]), приведем (фиг. 11.13)[1]) кривые ослабления в зависимости от частоты для некоторых наиболее употребительных марок коаксиального кабеля. Мы видим, например, что непрерывный сигнал вида (11.22), прошедший по 33-метровому кабелю RG-59/U, ослабляется на 20%.

Электронные интеграторы

11.21. Интегрирующая цепочка, как было показано в п. 11.14, является одним из основных элементов системы индуктивного датчика магнитного поля. Следовательно, ее функции и ограничения должны быть детально исследованы.



Фиг. 11.14. RC-интегратор.



Фиг. 11.15. RL-интегратор.

Рассмотрим две цепочки, приведенные на фиг. 11.14 и 11.15. Обе они описываются уравнением

$$U+\tau\frac{dU}{dt}=bV, \tag{11.29}$$

где, как и в (11.13), введено ослабление по постоянному току

$$b=\frac{R_S}{R+R_S}, \tag{11.30}$$

а постоянная времени для RC-цепочки (фиг. 11.14) равна

$$\tau=bRC, \tag{11.31}$$

тогда как для RL-цепочки (фиг. 11.15) она равна

$$\tau=b\frac{L_S}{R_S}. \tag{11.32}$$

Заметим, что если в первой цепочке учесть собственную индуктивность сопротивления R, а во второй — собственную емкость

[1]) Приведенные на фиг. 11.13 параметры кабелей близки к параметрам отечественных коаксиальных кабелей с соответствующим волновым сопротивлением.— *Прим. перев.*

сопротивления R_S, то обе цепочки становятся идентичными проведенной на фиг. 11.8 с $\tau = k\tau_p/\pi$.

11.22. Интегрирование уравнения (11.29) дает

$$U = \frac{b}{\tau}\int V\,dt - \frac{1}{\tau}\int U\,dt.$$

Если входной сигнал, поступающий с индуктивного датчика [уравнение (11.8)], интегрируется RC-цепочкой с высоким импедансом (см. замечание в конце п. 11.15), то можно записать точное выражение

$$\mu_0 H = \frac{RC}{S_e}\left[U(t) + \frac{1}{bRC}\int_0^t U\,dt\right]. \tag{11.33}$$

т. е. значение магнитного поля определяется выходным напряжением и хорошо известным поправочным членом. Мы использовали здесь «эффективную» поверхность датчика S_e, которая является величиной S, определяемой соотношением (11.9), уменьшенной на конечный коэффициент ослабления a (см. пп. 11.16 и 11.18), т. е.

$$S_e = aS. \tag{11.34}$$

Попутно заметим, что, если требуется сделать поправочный член в (11.33) минимальным, необходимо иметь $R \ll R_S$; кроме того, в п. 11.15 было показано, что необходимо также выполнить условие $R \gg R_T$.

11.23. Недостатки интегрирующих ячеек можно обсудить более детально, если рассмотреть общее решение уравнения (11.29):

$$U(t_p) = \frac{b}{\tau}\int_0^{t_p} V(t)\exp\left(-\frac{t_p - t}{\tau}\right)dt, \tag{11.35}$$

откуда сразу видно, что для обеих цепочек интеграл $b\int (V/\tau)\,dt$ имеет разумные значения только при условии, что длительность импульса t_p много меньше постоянной интегрирования τ. Очевидно, что отклонение от точного интегрирования зависит не только от отношения t_p/τ, но также и от формы входного импульса. Чем длиннее его передний фронт (t_p), тем меньше ошибка.

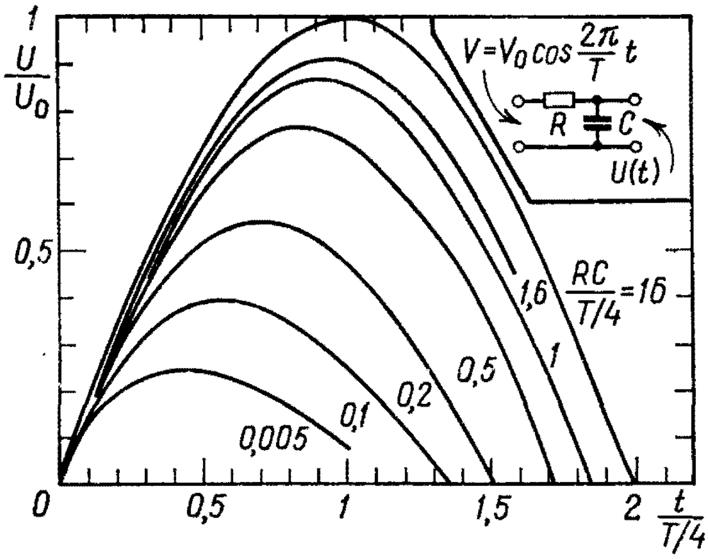
В качестве примера рассмотрим входной импульс с постоянной амплитудой V_0 и длительностью t_p. Тогда интеграл (11.35) равен

$$U = bV_0\left[1 - \exp\left(\frac{t_p}{\tau}\right)\right] = bV_0\left[\frac{t_p}{\tau} - \frac{1}{2}\left(\frac{t_p}{\tau}\right)^2 + \dots\right].$$

Первый член в правой части — основное значение интеграла, в то время как второй — ошибка первого порядка. Этот результат соответствует обычно используемому эмпирическому правилу, что постоянная времени τ должна быть примерно в 10 раз больше длительности (t_p) наблюдаемого импульса.

В принципе обычно выбирают τ (т. е. параметры цепочки) так, чтобы $\tau \gg t_p$. Заметим, однако, что выходной сигнал зависит от отношения b/τ, которое обусловливает верхний предел для τ; в противном случае сигнал становится слишком малым, чтобы быть надежно зарегистрированным.

11.24. Чтобы получить количественное представление об относительной ошибке, возникающей в случае, если длительность



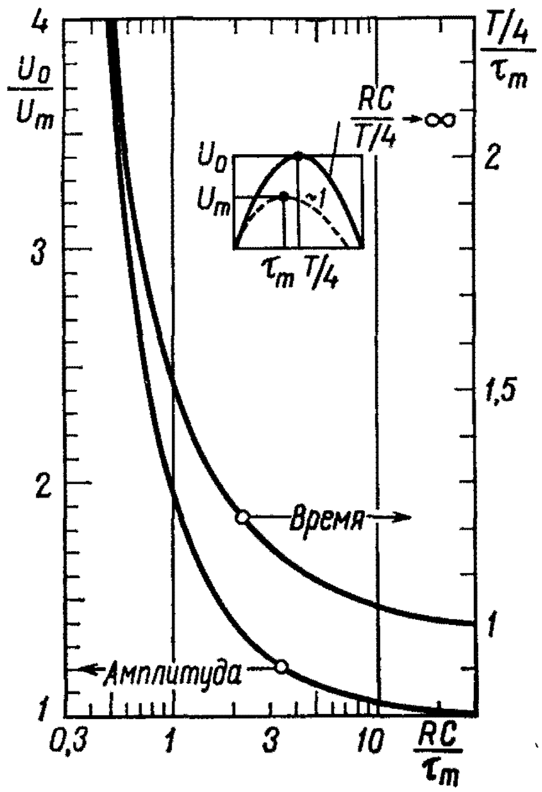
Фиг. 11.16. Искажение синусоидального сигнала в интеграторе, согласно (11.29), с $V = V_0 \cos (2\pi t/T)$.

импульса t_p одного порядка с τ, рассмотрим частный случай, когда входное напряжение пропорционально косинусу:

$$V(t) = V_0 \cos \frac{2\pi}{T} t. \tag{11.36}$$

Выходные импульсы, полученные при интегрировании выражения (11.29), представлены на фиг. 11.16 в зависимости от параметра $\tau/{}^1/_4 T$. Результаты суммируются на фиг. 11.17. Кривые, приведенные на этом графике (для амплитуды и длительности), позволяют в случае, когда четверть периода становится того же порядка, что и постоянная времени интегрирования, скорректировать выходной импульс, если необходимо получить точную кривую.

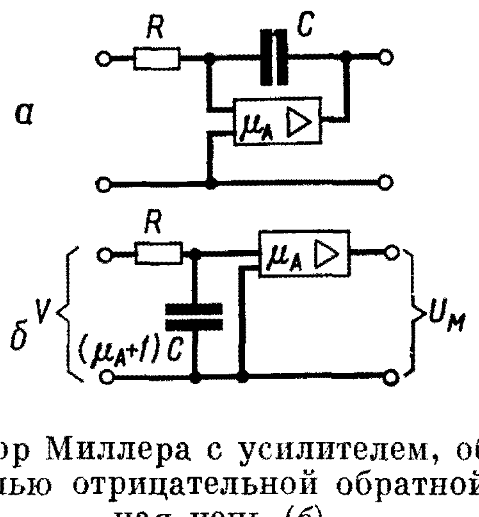
11.25. Помимо только что рассмотренных двух пассивных интегрирующих цепочек, иногда для интегрирования используются и другие схемы (11.17). Из их числа мы отметим *интегратор Миллера*, в котором усилитель с усилением μ_A создает напряжение отрицательной обратной связи, компенсирующее напряжение на интегрирующей цепи (фиг. 11.18). Как видно из эквивалентной схемы фиг. 11.18, *б*, такой интегратор работает как простая



Фиг. 11.17. Поправочные кривые, рассчитанные из данных фиг. 11.16.

По измеренным значениям U_m и τ_m определяются U_0 и $^1/_4 T$ — истинные значения амплитуды и периода магнитного поля.

RC-цепочка с последующим усилением в μ_A раз, в которой емкость (а также и постоянная времени интегрирования τ) увеличена



Фиг. 11.18. Интегратор Миллера с усилителем, обладающим коэффициентом усиления μ_A, и цепью отрицательной обратной связи (*а*); эквивалентная цепь (*б*).

в $(\mu_A + 1)$ раз. Следовательно, уравнение (11.35) с $U_M + \mu_A U$ преобразуется в

$$U_M(t_p) = \frac{b}{RC} \int_0^{t_p} V(t) \exp\left[-\frac{t_p - t}{RC(\mu_A + 1)}\right] dt.$$

По сравнению с пассивным RC-интегратором преимущество интегратора Миллера очевидно: для данного выходного сигнала отклонение от точного интегрирования становится меньше или при данной относительной ошибке выходной сигнал возрастает в μ_A раз. Интегратор Миллера, следовательно, может быть использован для измерения длинных импульсов (обычно с $t_p \gg 0{,}01$ с).

Эффекты сверхсильных полей

11.26. В гл. 4 было показано, что поверхность проводника, помещенного в переменное магнитное поле, нагревается до температуры

$$c_v\theta \approx \frac{1}{2}\mu H^2, \tag{11.37}$$

где c_v — удельная теплоемкость (п. 4.12). При обычных условиях эксперимента проводник достигнет точки испарения в импульсных полях 1,5. . .2 МЭ. Тот же самый эффект будет иметь место и в проводнике, образующем нашу катушку, если только ее толщина d ненамного меньше глубины скин-слоя $s_\varphi \approx \sqrt{(t/\mu_0\sigma_0)}$ (где σ_0 — электропроводность). Если же

$$d \ll s_\varphi, \tag{11.38}$$

то в этом случае (см. п. 4.45) температура уменьшается примерно до

$$c_v\theta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d}{s_\varphi}\right)^2 \mu H^2. \tag{11.39}$$

Существуют две возможности удовлетворить условию (11.38): уменьшить толщину d или уменьшить проводимость σ_0 материала датчика. В обычных экспериментах с сверхсильными магнитными полями достаточно использовать медную проволоку диаметром 0,01 или 0,005 см. Если этого недостаточно, то можно воспользоваться второй возможностью и изготовить катушку, например, из нихромовой проволоки [9.7]. Помимо сравнительно низкой проводимости ($\sigma_0 = 0{,}3\cdot 10^6$ См$\cdot$м$^{-1}$), эта проволока имеет то преимущество, что обладает очень малым температурным коэффициентом сопротивления (σ уменьшается менее чем на 8% при увеличении температуры от 0 до 1000 °C).

11.27. Другим заметным эффектом в сверхсильных магнитных полях является зависимость сопротивления от магнитного поля. В соответствии с фиг. 10.22, например, проводимость меди при комнатной температуре уменьшается в 5 раз уже в поле всего порядка 20 кЭ. Влияние этого эффекта может быть учтено, во всяком случае в первом приближении, введением возрастающей величины R_P в различные рассмотренные ранее схемы.

11.28. При работе со сверхсильными магнитными полями, кроме того, возникают трудности, обусловленные большой крутизной нарастания поля: во взрывных генераторах обычно получаются значения 10^{13} Э/с и более (см. фиг. 9.23). В этом случае индуцированное напряжение может достигать величин более 10 кВ, даже если используются очень маленькие датчики с чувствительной поверхностью $S = NA + S_a \approx 10$ мм² [см. выражение (11.9)]. При необходимости (в связи с проблемой изоляции кабелей, разъемов и т. д.) напряжение может быть уменьшено одним из следующих способов:

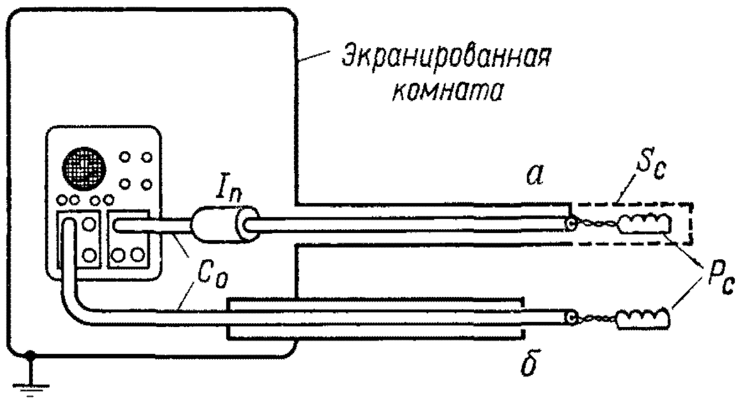
а) уменьшением поверхности датчика (однако из соображений точности поверхность в большинстве случаев ограничивают величиной $S \gtrsim 5$ мм²);

б) увеличением сопротивления датчика R_P (см. п. 11.26);

в) введением шунтирующего сопротивления $R_{\text{шунт}}$ (на фиг. 11.8 его следовало бы включить параллельно емкости C_P и сопротивлению R_T). Введение этого сопротивления может быть учтено количественно путем замены в формулах пп. 11.16—11.18: $R_T^{-1} \to R_T^{-1} + R_{\text{шунт}}^{-1}$.

Практическое использование и конструктивные элементы

11.29. При использовании индуктивных датчиков необходимо обращать особое внимание на защиту от наводок, обусловленных случайными полями и взаимодействием с полем систем источников питания. На фиг. 11.19 показаны два обычно используемых

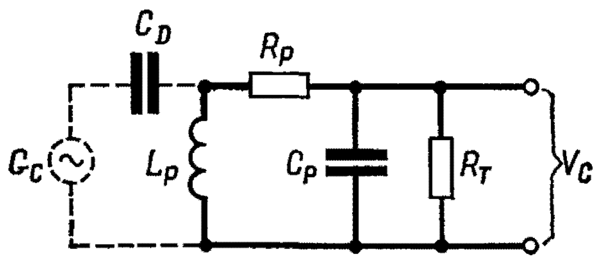


Фиг. 11.19. Схема устройства для измерения импульсных полей, демонстрирующая два возможных варианта измерений.

C_0 — коаксиальный кабель; I_n — блок интегратора; S_c — электростатический экран; P_c — измерительная катушка.

устройства, которые удовлетворительно работают в большинстве случаев. Проволока катушки должна быть намотана, а выводы скручены так, чтобы избежать ненужных петель; подсоединение к коаксиальному кабелю должно быть выполнено на возможно коротком расстоянии. Датчик необходимо подсоединить к регистрирующей системе коаксиальным кабелем; кабель должен либо иметь вторую оплетку (кабель с двойным экраном), либо помещаться для защиты в металлическую трубу. Осциллограф и интегратор необходимо располагать внутри экранированной комнаты. Интегратор обычно закрывается металлическим кожухом (фиг. 11.19), плотно соединенным с коаксиальным кабелем. Кабель и, что более важно, вся система должны заземляться только в одной тщательно выбранной точке, чтобы избежать индуктивных наводок на петли, образованные заземляющими проводниками.

11.30. Иногда (например, когда магнитный датчик помещается очень близко к проводнику с током или вводится в проводящую плазму) катушка должна быть защищена от электростатических



Фиг. 11.20. Емкостная связь цепи индуктивного датчика с источником наводки G_C.

наводок. Емкостной связью между датчиком и его окружением тем не менее в большинстве случаев пренебрегают, так как она редко превышает несколько пикофарад. Рассмотрим, например, простую схему, приведенную на фиг. 11.20, в которой источник сигнала $\widetilde{G}_T = G_0 e^{i\omega t}$ связан с цепью датчика через емкость C_D. Если предположить, что $1/\omega C_P$, $\omega L_P \gg R_T$, то получим

$$\widetilde{G}_C \approx I\left(R_P + R_T + \frac{1}{i\omega C_D}\right),$$

$$\widetilde{V}_C = IR_T.$$

Вклад в выходную амплитуду от такой емкостной связи будет (согласно п. 11.18)

$$|V_C| \approx G_0 \frac{\omega R_T C_D}{\{1 + [\omega (R_P + R_T) C_D]^2\}^{1/2}}.$$

Изготовляя две катушки таким образом, чтобы их выходные сигналы были $V + V_C$ и $-V + V_C$, и подавая эти сигналы на дифференциальный усилитель, можно получить чистый индуктивный сигнал величиной $2V$. Использование такой *системы дифференциального датчика* представляет интерес в практических случаях, когда использование электростатического экрана невозможно.

Обычно электростатический экран состоит из коаксиального проводника, который разрезается вдоль линий поля H, толщина которого меньше толщины скин-слоя s_φ. Защита будет идеальной, если она выполнена так, как показано на фиг. 11.19.

11.31. Точность абсолютных измерений магнитных полей определяется множеством факторов: от точности калибровки датчика и интегратора до точности записи сигнала на экране осциллографа.

Калибровка чувствительности датчика может быть проведена различными методами. Например, метод, используемый группой во Фраскати [1.255], основан на эталонном датчике, т. е. на тщательно намотанном датчике с относительно большой чувствительной поверхностью NA (1,109 см^2), такой, чтобы площадь S_e была минимальной; чувствительность датчика определяется соотношением (11.8). Для метода требуется также интегратор с хорошо известной постоянной времени, которая может быть получена путем тщательного измерения его R- и C-элементов или калибровкой с точно известным входным импульсом. Очевидно, что точность может быть повышена путем использования датчиков и интеграторов различной конструкции с последующей перекрестной проверкой получаемых результатов. Этим методом может быть достигнута точность лучше чем $\pm$ 1%.

Любой датчик затем калибруется в магнитном высокочастотном поле, создаваемом стабилизированным генератором (400 кГц), путем сравнения его выходного сигнала с сигналом эталонного датчика при помощи лампового вольтметра.

В конечном счете предельная точность измерений импульсного магнитного поля зависит от точности, с которой электрический сигнал воспроизводится на экране осциллографа. Если требуется получить точность порядка нескольких процентов, то необходимо регулярно проверять чувствительность и линейность воспроизведения по всему экрану осциллографа [1.256].

11.32. Конструирование индуктивных датчиков не представляет практических проблем. Некоторые технические трудности возникают при изготовлении специальных очень миниатюрных датчиков.

Типичный датчик для измерения мегаэрстедных полей, создаваемых во взрывных генераторах (группа во Фраскати), состоит из пяти витков медной проволоки диаметром 0,05 мм, намотанных на цилиндрический стержень (керамическая трубка или эпоксидный стержень, армированный стекловолокном) диаметром 1 мм. Концы проволок плотно и равномерно скручены и соединены с коаксиальным кабелем вне области сильного поля на таком минимальном расстоянии, какое только допускается имеющимся пространством (см. фиг. 11.5). До четырех таких миниатюрных катушек монтировалось в пределах нескольких миллиметров на одном из концов датчика. Необходимо уделять внимание проблемам электрической изоляции и механической прочности всей конструкции. Для этого датчик в большинстве случаев покрывается или заливается эпоксидной смолой. Формой может служить стеклянная трубка, которая является корпусом датчика. В случае необходимости, когда датчик имеет более сложную форму, вместо эпоксидной смолы может быть использована силиконовая резина. Группа во Фраскати использует силиконовую резину («силастик») в связи с ее гибкостью и способностью хорошо заполнять форму. В обычной практике эпоксидный «чехол» может быть армирован стекловолокном; для получения однородной и свободной от пузырьков эпоксидной смолы с хорошими изоляционными свойствами она должна помещаться на короткое время в вакуум.

§ 3. ИЗМЕРЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ТОКА

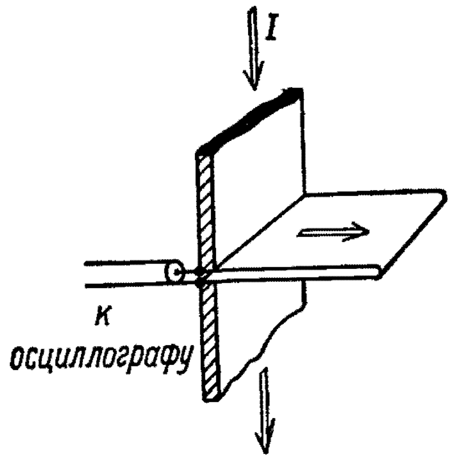
Шунт

11.33. Среди методов измерения электрического тока наиболее популярен метод, связанный с измерением падения напряжения при протекании тока через хорошо известное сопротивление (шунт). Когда длительность импульса тока становится короче 1 мс и его амплитуда превышает 10 кА (типичные величины, представляющие интерес для нас), возникают различного рода трудности, которые делают этот метод менее употребительным и точным, чем индуктивный, который будет обсуждаться несколько позже. Поэтому шунтовый метод будет рассмотрен очень коротко.

11.34. Основная проблема использования шунтового метода возникает при очень высоких частотах (короткие импульсы), когда индуктивное сопротивление системы шунта может стать больше активного (или сравнимо с ним), что приводит к появлению зависящей от частоты ошибки. Аналогичный эффект возникает и тогда, когда толщина скин-слоя s_φ становится меньше толщины шунта, т. е. когда величина активного сопротивления зависит от частоты.

Дополнительные проблемы обусловлены рассеиваемой шунтом мощностью и механическими эффектами, связанными с большими токами. И наконец, имеет место неудобство (проблема заземления), обусловленное задачей непосредственной связи между основной (силовой) цепью и измерительным оборудованием.

Очевидно, что некоторые из этих трудностей можно обойти или по крайней мере уменьшить. На фиг. 11.21 показана, например, шунтовая система малой индуктивности (система с параллельными шинами) и с не зависящим от температуры и частоты сопротивлением (используется нихромовая фольга тоньше глуби-



Фиг. 11.21. Полосковый шунт (нихромовая фольга).

ны скин-слоя). В такой конструкции можно бороться с механическими усилиями и тепловыми эффектами, просто используя достаточно широкую ленту.

Пояс Роговского

11.35. Поскольку в большинстве экспериментов с сильными магнитными полями имеют дело с большими быстро изменяющимися токами, наиболее удобными методами являются индуктивные. Наиболее очевидным является, по-видимому, метод, в котором используется магнитный индуктивный датчик в геометрически хорошо определенной системе, для которой известны соотношения ток — поле; тогда из измерения магнитного поля легко получить полный ток. Имеется, однако, аналогичный, но более удобный метод, который не зависит от геометрии: метод *пояса Роговского.*

Рассмотрим тороидальную катушку C_0 с полным числом витков N при поперечном сечении каждого витка S и предположим (фиг. 11.22), что:

а) магнитная индукция $\mu\mathbf{H}$ постоянна по сечению S;

б) плотность витков N/l и сечение S постоянны вдоль катушки.

Тогда выражение для напряжения V_R, наведенного в катушке,

$$V_R = \oint_{C_0} \frac{N}{l}\, dl \frac{d}{dt} \iint_S \mu\mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} \tag{11.40}$$

можно преобразовать к виду

$$V_R = \mu_0 \frac{N}{l} S \frac{d}{dt} \oint_{C_0} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}.$$

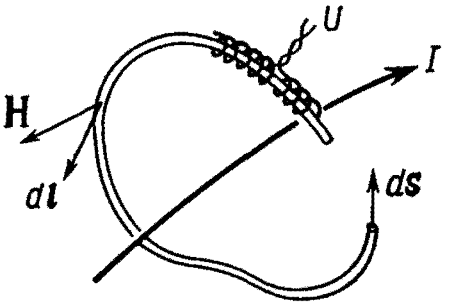
С учетом закона Ампера (2.12) это выражение упрощается:

$$V_R = k_R \frac{dI}{dt}, \tag{11.41}$$

где

$$k_R = \mu_0 \frac{N}{l} S \tag{11.42}$$

определяется как чувствительность пояса. Видно, что это соотношение не зависит от относительного положения пояс — ток, и необходимо только, чтобы пояс полностью охватывал токонесущий проводник.



Фиг. 11.22. Пояс Роговского.

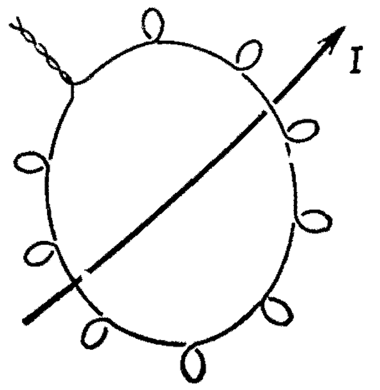
11.36. После интегрирования уравнения (11.41) получим линейное соотношение между током I и напряжением U на поясе. Используя простую интегрирующую RC-цепочку и выполняя ряд условий, аналогичных условиям для магнитного датчика (п. 11.22), имеем

$$I = \frac{RC}{k_R} \left[U(t) + \frac{1}{bRC} \int_0^t U\, dt \right]. \tag{11.43}$$

Соответственно и все рассмотрения, проведенные для магнитного индуктивного датчика (частотные характеристики, ошибка интегрирования и т. д.), справедливы также и для пояса Роговского. В частности, согласно (11.41), необходимо, чтобы импеданс датчика (для всех важных частотных компонент ω сигнала) был меньше согласующего сопротивления R_T (см. фиг. 11.8). Так как импеданс пояса Роговского в основном определяется индуктивностью катушки, то условие, необходимое для правильной работы системы (см. п. 11.16), будет иметь вид

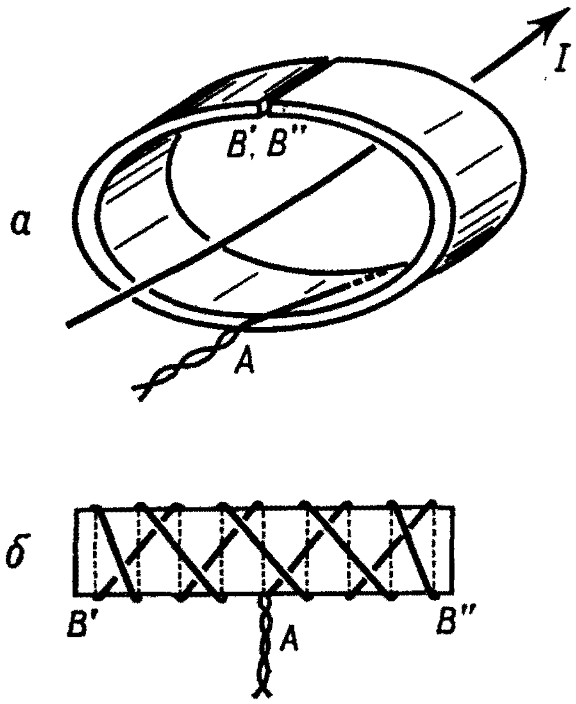
$$\omega L \ll R_T + R_P. \tag{11.44}$$

11.37. Конструкция пояса Роговского в первую очередь определяется требуемой чувствительностью (11.42), но должны быть выполнены также и условия, необходимые для получения нужных частотных характеристик. Кроме того, нельзя забывать об условиях «а» и «б», сформулированных в п. 11.35. Согласно первому из этих условий, ширина каждого из витков пояса в направ-



Фиг. 11.23. Дополнительный виток в поясе Роговского.

лении градиента магнитного поля должна быть достаточно мала [1]. Два условия, отмеченные в «б», носят технологический характер и легко удовлетворяются.



Фиг. 11.24. Конструкция плоского пояса Роговского.

а — расположение вокруг токонесущего проводника; *б* — детали намотки. На схематическом чертеже «*б*» имеет место слабое отклонение от постоянной плотность намотки на концах B' и B'', но это при необходимости может быть легко исправлено.

На практике имеет место и третий эффект, который может приводить к ошибкам и о котором необходимо помнить. Действительно, как схематически показано на фиг. 11.23, простой пояс

[1] В наиболее часто встречающемся на практике случае, когда прямой проводник и пояс коаксиальны, градиент поля одинаков для всех витков, и это условие не играет роли.

Роговского, помимо N основных витков, имеет один дополнительный виток, окружающий проводник, который и дает основной вклад в сигнал от пояса [1]). Этот эффект может быть устранен путем использования бифилярной намотки.

На фиг. 11.24 приведена конструкция пояса Роговского, в которой учтены все рассмотренные рекомендации [11.6].

Трансформатор тока

11.38. Индуктивность пояса Роговского может быть большой (обычно до 50 мкГ), так что условие (11.44) не всегда выполняется; в то же время выбор величины R_T ограничен имеющимися типами кабелей.

Если импеданс пояса в основном определяется индуктивностью L, так что

$$\omega L \gg R_P + R_T, \tag{11.45}$$

то наведенное на пояс напряжение равно

$$V \approx L \frac{dI_R}{dt}, \tag{11.46}$$

где I_R — ток в катушке. Однако, согласно (11.41), справедливо соотношение

$$I \approx \frac{L}{k_R} I_R;$$

учитывая, что

$$L \approx \mu_0 \frac{N^2}{l} S,$$

окончательно получим

$$I \approx N I_R.$$

В этом случае пояс действует как простой трансформатор тока, и напряжение на его выходе U (измеренное на сопротивлении R_T) непосредственно дает значение основного тока

$$I \approx \frac{N}{R_T} U. \tag{11.47}$$

[1]) В уравнении (11.40) п. 11.35 этим эффектом мы пренебрегли, так как предполагалось, что все витки независимы и строго нормальны к $d\mathbf{l}$.

Первое приложение Формулы для расчета магнитных полей и индуктивностей проводников, обладающих простой геометрией

§ 1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

П1.1. Ниже дается сводка формул для расчета магнитных полей. Все приведенные выражения могут быть получены методами, изложенными в гл. 2 (некоторые формулы в этой главе уже встречались). Особое внимание уделено рассмотрению соленоидальной катушки как для случая постоянной плотности тока, так и для случая распределения тока, вытекающего из теории магнитного потенциала (п. 2.44).

§ 2. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРОСТЫХ ПРОВОДНИКОВ

П1.2. Как было показано в гл. 2, точный расчет индуктивности существует только для немногих случаев. Наиболее прямым способом определения индуктивности цепи явилось бы ее непосредственное экспериментальное измерение, однако на практике сделать это не всегда возможно, как, например, в стадии планирования эксперимента. Ниже приводится сводка формул и графиков для вычисления индуктивностей основных элементов цепи, часто встречающихся в экспериментальной практике. Часть приведенных формул и табличных данных заимствована из фундаментальной работы Гровера [2.28], остальное можно найти в справочниках [2.29, 3.5]. Большинство формул приведено к виду, удобному для практического использования.

§ 3. СВОДКА ФОРМУЛ

П1.3. *Символы*

H — напряженность магнитного поля;
B — магнитная индукция;
L —индуктивность;

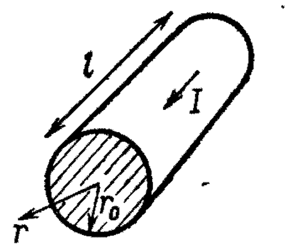
N — полное число витков или нитей;
h — ширина проводника или длина катушки;
b, a — наружный и внутренний радиусы катушки;
f (коэффициент заполнения) = объем проводника/объем катушки $= N\Sigma/h\,(b-a)$; Σ — площадь поперечного сечения проводника;
I — полный ток одного витка или нити;
H_f $= HI/h$ — максимальная напряженность поля в центре (в единицах Э, А, см; $H_f = 0{,}4\pi NI/h$);
$G_{\text{макс}}$ — максимальное значение коэффициента Фабри [уравнение (2.52)] в системе МКСА (для перевода в практическую систему следует умножить на $0{,}4\,\pi$).

П1.4. *Одиночный провод*

$$H(r)=\frac{1}{2\pi}\frac{I}{r} \qquad (r \geqslant r_0) \qquad \text{[уравнение (2.26)]}, \tag{П1.1}$$

$$B(r)=\mu H=\frac{\mu}{2\pi}\frac{r}{r_0^2}I \qquad (r \leqslant r_0) \qquad \text{[уравнение (2.76)]}, \tag{П1.2}$$

$$L=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_0}-1+\frac{1}{4}\mu_R\right)l, \qquad \left[\frac{1}{4}\mu_R\text{-член, уравнение (2.77)}\right]. \tag{П1.3}$$



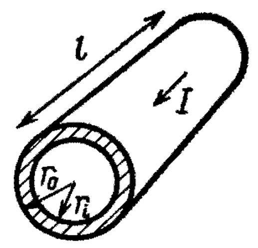
Фиг. П1.1. Одиночный провод ($l \gg r_0$).

П1.5. *Полый цилиндр*

$$H(r) \to \text{уравнение (П1.1)} \qquad (r \geqslant r_0),$$

$$B(r)=\frac{\mu}{2\pi}\frac{r^2-r_i^2}{r\,(r_0^2-r_i^2)}I \qquad (r_i < r \leqslant r_0), \tag{П1.4}$$

$$L=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_0}-1+K_w\right)l, \qquad K_w\left(\frac{r_i}{r_0}\right) \to \text{табл. П1.I.} \tag{П1.5}$$



Фиг. П1.2. Полый цилиндр ($l \gg r_0$).

ТАБЛИЦА П1.I
Цилиндрический проводник [2.28]

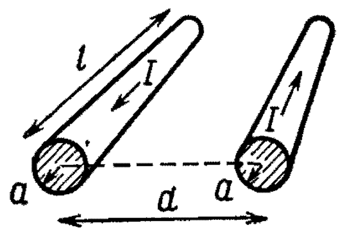
r_i/r_0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
K_w	0,250	0,245	0,188	0,130	0,066	0

П1.6. *Параллельные провода*

$H \to$ уравнения (2.31), (2.32), (2.37), учитывающие эффект близости, и уравнение (2.38).

$$L \approx \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{d}{a} \to \text{уравнение (2.85)}, \qquad (\text{П1.6})$$

$L \to$ уравнения (2.83), (2.84), учитывающие эффект близости.



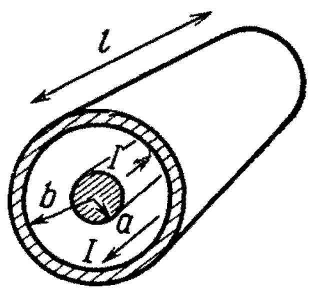
Фиг. П1.3. Параллельные провода ($l \gg d$).

П1.7. *Коаксиальный проводник*

$H(r) \to$ уравнения (П1.1), (П1.2)

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln \frac{b}{a} \quad [\text{уравнение (2.75)}],$$

$$L \approx \frac{\mu_0}{\pi} \frac{\Delta r}{a+b} \quad (\Delta r = b - a \ll a). \qquad (\text{П1.7})$$



Фиг. П1.4. Коаксиальный проводник ($l \gg r_0$).

П1.8. *Круговой виток*

На оси

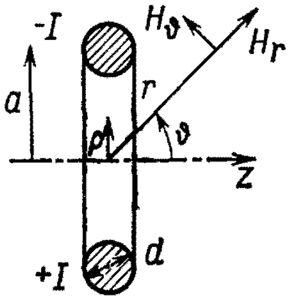
$H_z(z) \to$ уравнение (2.60).

Вне оси

H_r, $H_\vartheta \to$ уравнение (2.58) при условии $r \gg a$, или $a \gg r$, или $\vartheta \ll 1$,

H_z, $H_\rho \to$ [2.31, 2.2] (в общем случае).

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{4l}{d} - 2{,}45\right), \text{ периметр } l = 2\pi a, \; a \gg d. \qquad (\text{П1.8})$$



Фиг. П1.5. Круговой виток.

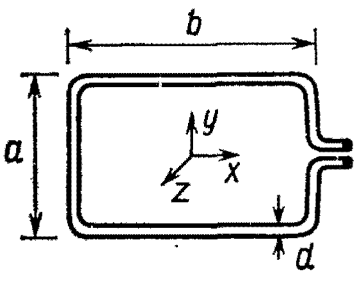
П1.9. *Виток провода*

Вне оси

H_z, H_x, $H_y \to$ [3.5].

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{4l}{d} - K_P\right), \quad K_P \approx 2 \ln \frac{l}{S}, \qquad (\text{П1.9})$$

$S = ab$, площадь витка; $l = a + b$ — периметр.



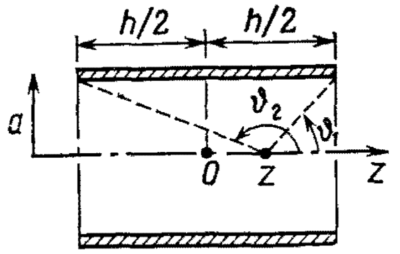
Фиг. П1.6. Замкнутый виток провода.

П1.10. *Тонкий соленоид*

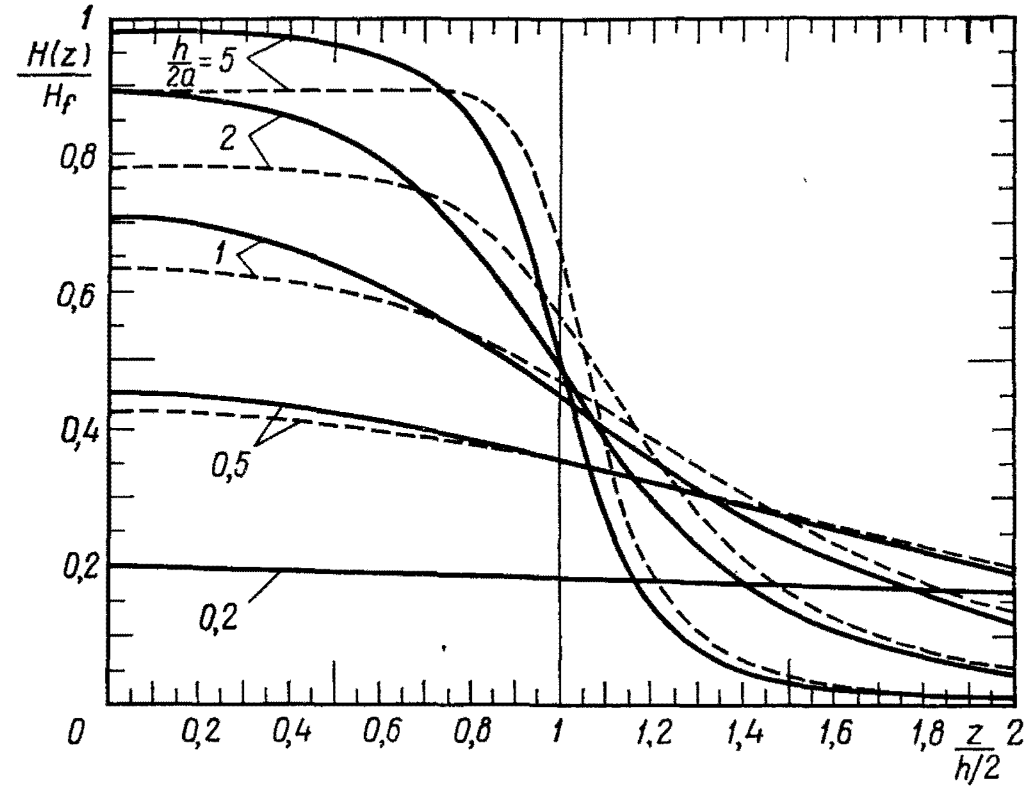
Постоянная плотность тока

На оси

$$H_z(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{2} H_f(\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1), \text{ см. фиг. П1.8а и П1.8б,} \qquad (\text{П1.10})$$

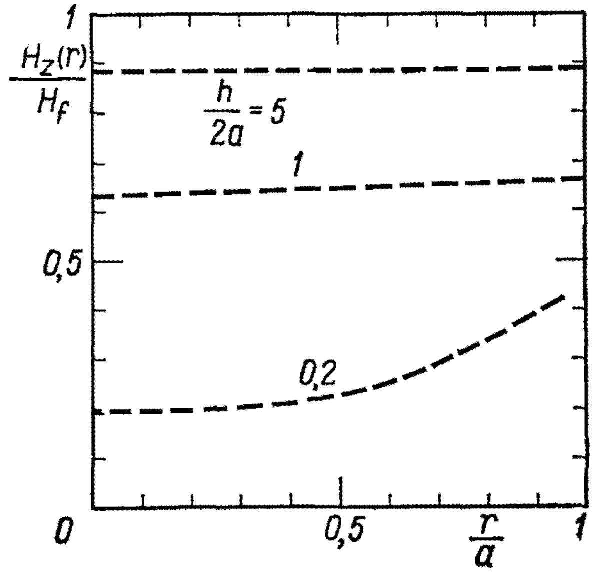


Фиг. П1.7. Тонкий соленоид.



Фиг. П1.8а. Поле на оси тонкого соленоида.

Сплошная кривая соответствует постоянной плотности тока, уравнение (П1.10); пунктирная кривая соответствует распределению тока, найденному из теории потенциала, см. фиг. 2.19.



Фиг. П1.8б. Аксиальное поле в средней плоскости тонкого соленоида.

Распределение тока найдено из теории потенциала, см. фиг. 2.19.

в особом случае

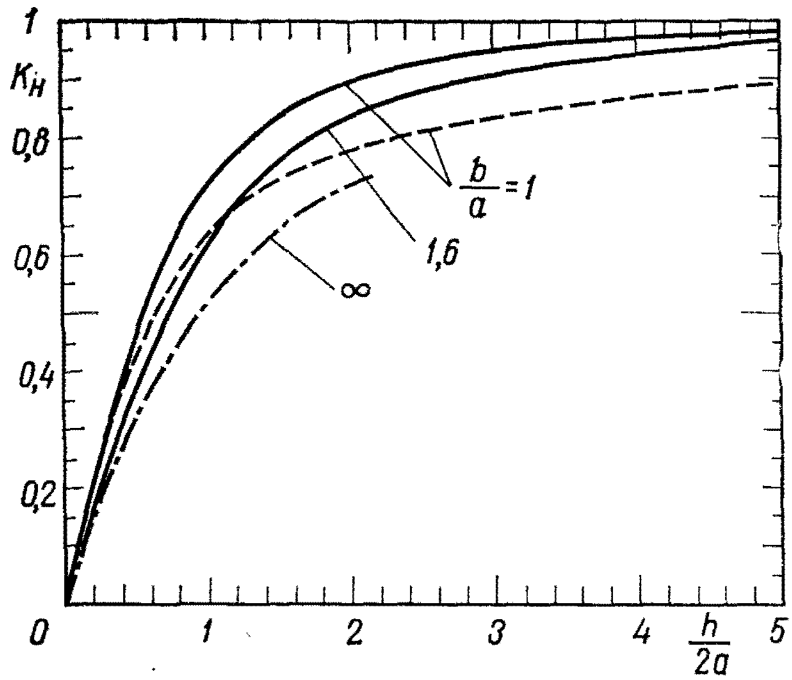
$$H_z\left(\frac{1}{2}h\right)=H_f\frac{1}{\sqrt{(2a/h)^2+4}}. \tag{П1.11}$$

Поле в центре

$$H_z(0)=H_fK_H,\quad K_H=\left[\left(\frac{2a}{h}\right)^2+1\right]^{-1/2}. \tag{П1.12}$$

$$L=\mu_0 N^2\frac{S}{h}K_L,\ S=\pi a^2 — \text{площадь поперечного сечения}, \tag{П1.13}$$

$K_L\left(\frac{h}{2a}\right)$, см. фиг. П1.10.



Ф и г. П1.9. Отношение напряженности поля $H_z(0)$ в центральной точке к полному току I в соленоиде [уравнения (П1.12), (2.49)].

Пунктирные кривые соответствуют распределению тока, определяемому теорией потенциала (п. 2.44) (b/a = 1 [2.17]; $b/a=\infty$ [2.18]).

Распределение плотности тока, определяемое теорией потенциала (п. 2.6 [2.17])

Тонкий соленоид ($b/a=1$; $N=1$).

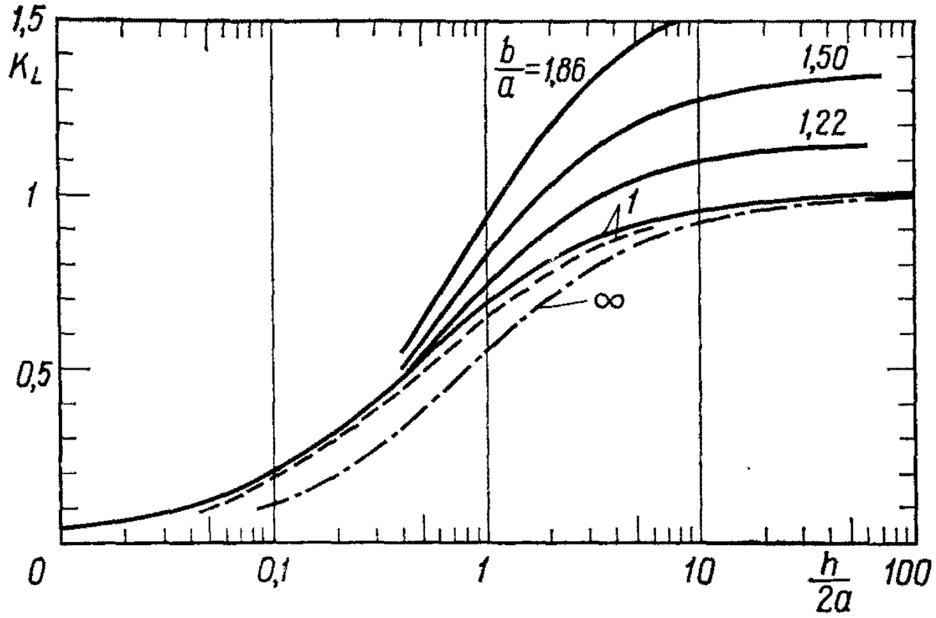
На оси

$H_z \to$ фиг. П1.8а.

В центре

$$H_z(0)=H_fK_H \to \text{фиг. П1.9.} \tag{П1.14}$$

$$L=\mu_0\frac{S}{h}K_L \to \text{фиг. П1.10.}$$



Фиг. П1.10. Поправочный множитель индуктивности K_L для различных соленоидов.

Сплошные кривые соответствуют постоянной плотности тока, пунктирные кривые — распределению тока, определяемому теорией потенциала (см. фиг. П1.9).

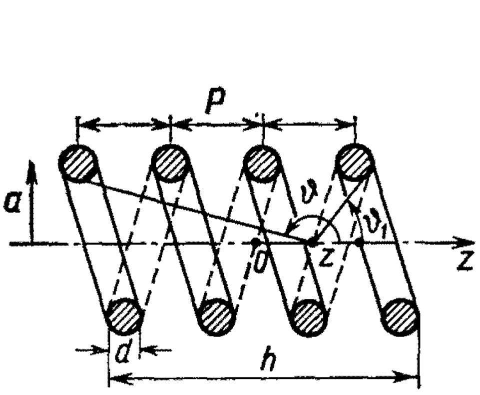
П1.11. *Спираль*

На оси [3.5]

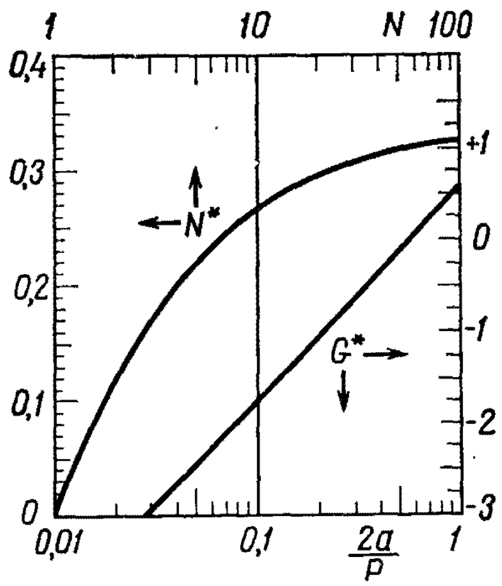
$$H_z(\vartheta_1, \vartheta_2; p, a) = \frac{1}{4} H_f \operatorname{ctg} \frac{p}{\pi a} (\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1). \tag{П1.15}$$

$$L = L_S - \mu_0 a N (G^* + N^*), \tag{П1.16}$$

L_S — см. уравнение (П.13); G^* и N^* — см. фиг. П1.12.

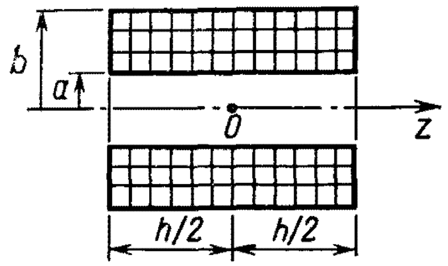


Фиг. П1.11. Спираль (с шагом $p = h/N$).



Фиг. П1.12. Поправочные члены для индуктивности спирали (из [2.28]).

П1.12. *Толстый соленоид*



Фиг. П1.13. Толстый соленоид.

$j = \frac{I}{\Sigma} = \frac{NI}{n(b-a)f}$ (const).

Постоянная плотность тока $\left(j = \frac{I}{\Sigma} = \frac{NI}{h(b-a)f}\right)$.

В центре

$H_z(0) = H_f K_H \to$ фиг. П1.9 и уравнение (2.49).

На оси

$H_z(z) \to$ уравнение (2.49).

$G_{\text{макс}} = 0{,}143$ для $b/a = 3$ и $h/2a = 2$ [G определяется из уравнения (2.52)]. (П1.17)

$L = \mu_0 N^2 \frac{\pi a^2}{h} K_L$, $K_L\left(\frac{b}{a}, \frac{h}{2a}\right)$ для $f \approx 1$, см. фиг. П1.10.

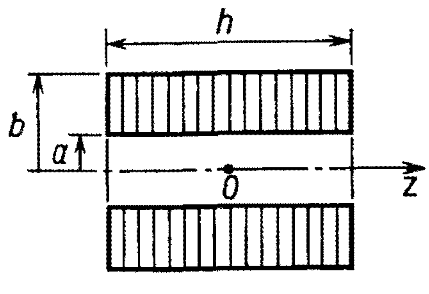
Распределение тока, определяемое теорией потенциала (см. п. 2.44 [2.18]).

Толстый соленоид ($b/a \to \infty$; $N = 1$),

$N_z(0) = H_j K_H \to$ фиг. П1.9.

$L = \mu_0 \pi a^2 K_L/h \to$ фиг. П1.10

П1.13. *Толстая спираль*



Фиг. П1.14. Толстая спираль.

$j = j_0 \frac{a}{r}$ — биттеровское распределение постоянного тока;

$j_0 = \frac{IN}{ah \cdot \ln(b/a)}$.

В центре

$$H_z(0) = H_f \frac{1}{\ln(b/a)} f \ln\left[\frac{b}{a} \frac{1+\sqrt{(2a/h)^2+1}}{1+\sqrt{(2b/h)^2+1}}\right]. \qquad (\text{П}1.18)$$

На оси

$H_z(z) \to [2.8]$

$G_{\text{макс}} = 0{,}166$ для $b/a = 6$ и $h/2a = 2$.

Замечание. Для $j = j_0(a/r)^n$ см. п. 7.9.

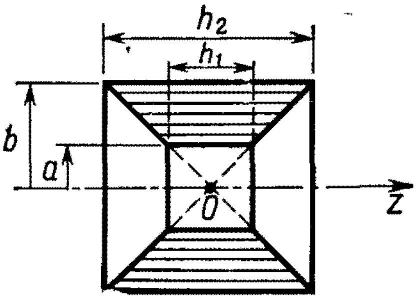
П1.14. *Трапециевидный соленоид* ($H_f = I/h_1$)
В центре

$$H_z(0) = H_f f \frac{1}{\sqrt{(2a/h_1)^2+1}} \ln\frac{b}{a}. \qquad (\text{П}1.19)$$

На оси

$H_z(z) \to [1.105]$.

$G_{\text{макс}} = 0{,}160$ для $b/a = 4{,}5$ и $h_1/2a = 1$.



Фиг. П1.15. Трапециевидный соленоид.

$$i = i_0 \frac{a}{r}; \qquad i_0 = \frac{I}{h_1}.$$

П1.15. *Система двух соленоидов*
В центре

Сумма уравнений (П1.10); обсуждение оптимального устройства для получения полей с наибольшей постоянностью (катушки Гельмгольца) приведено в [7.31]; см. уравнение (2.61).

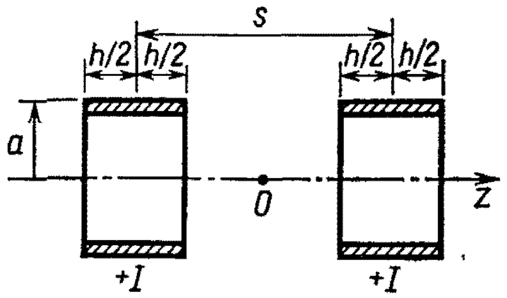
$L = 2\,(L \pm M)$: знак плюс для токов $\uparrow\uparrow$, знак минус для токов $\uparrow\downarrow$, см. п. 2.33. (П1.20)

L — индуктивность одной катушки, см. уравнение (П1.13), M — взаимная индуктивность

$$M = \mu_0 N^2 \frac{\pi a^2}{h}\left[\frac{s+h}{2h} K_L\left(\frac{s+h}{2a}\right) + \frac{s-h}{2h} K_L\left(\frac{s-h}{2a}\right) - \frac{s}{h} K_L\left(\frac{s}{2a}\right)\right].$$

(П1.21)

Значение K_L приведено на фиг. П1.10: $K_L(s+h/2a)$, обозначает K_L для катушки длиной $s+h$ и радиусом a.

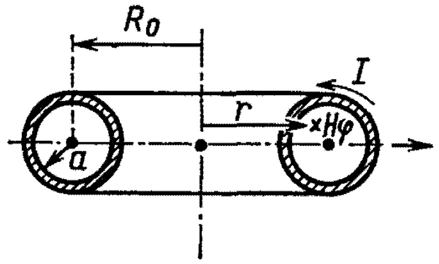


Фиг. П1.16. Система двух соленоидов.

П1.16. *Тор*

$$H_\varphi(r)=\frac{1}{2\pi}\frac{NI}{r}. \qquad (\text{П}1.22)$$

$$L=\mu_0 N^2\{R_0-\sqrt{(R_0^2-a^2)}\}. \qquad (\text{П}1.23)$$



Фиг. П1.17. Тор.

П1.17. *Пластина* $(H_f=I/h)$

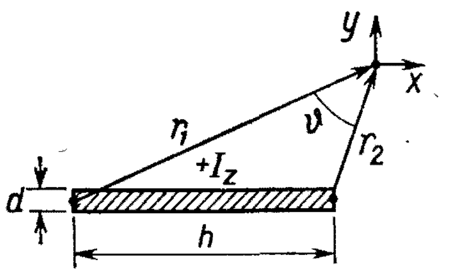
Тонкая пластина $(d \ll h)$:

$$H_x(\theta)=-\frac{1}{2\pi}H_f\vartheta,\ H_y(r_1,\ r_2)=\frac{1}{2\pi}H_f\ln\frac{r_1}{r_2}. \qquad (\text{П}1.24)$$

Толстая пластина:

H_x и H_y см. [3.5]

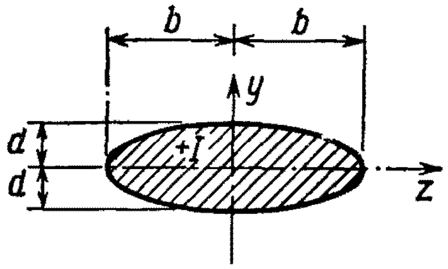
$$L\approx\mu_0\left(\ln\frac{2l}{h+d}+0{,}5\right). \qquad (\text{П}1.25)$$



Фиг. П1.18. Пластина.

l — длина пластины; $i=\frac{NI}{n}$.

П1.18. *Проводник эллиптического сечения.* (Распределение тока выводится из теории потенциала [3.7].)



Ф и г. П1.19. Проводник эллиптического сечения.

Поле на поверхности

$$|H_s| = \frac{1}{2\pi}\frac{I}{b}\left[1 - z^2\frac{b^2 - d^2}{b^4}\right]^{-1/2}, \tag{П1.26}$$

на вертикальной оси, $z = 0$,

$$|H_s| = \frac{1}{2\pi}\frac{I}{b} \tag{П1.27}$$

и на боковых концах, $z = b$,

$$|H_s| = \frac{1}{2\pi}\frac{I}{d}. \tag{П1.28}$$

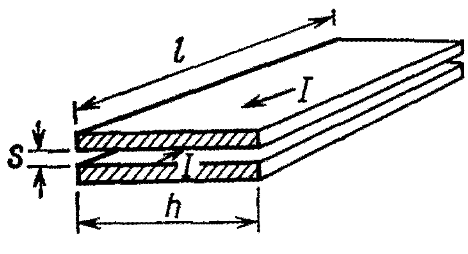
Замечание. Для этого проводника приближенно справедлива формула для прямоугольной толстой пластины в случае конечной толщины ширины скин-слоя.

П1.19. *Параллельные плоские пластины*

Постоянная плотность тока:

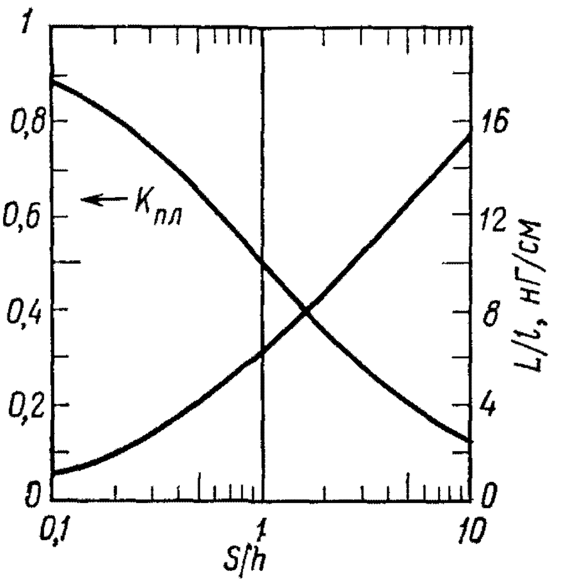
H_x и H_y: векторная сумма уравнений (П1.24).

$$L = \mu_0\frac{Sl}{h}K_{\text{пл}},\quad \text{для}\quad K_{\text{пл}}(s/h)\ \text{см. фиг. П1.21.} \tag{П1.29}$$



Ф и г. П1.20. Передающая линия из тонких параллельных плоских пластин.

Распределение тока, определяемое теорией потенциала: см. [7.5] для случая тонких и толстых пластин.

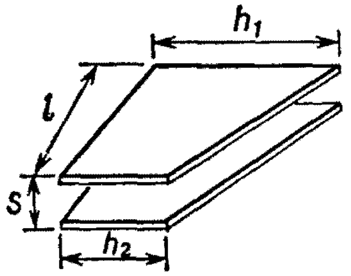


Фиг. П1.21. Значения индуктивности и поправочного множителя для передающей линии из параллельных плоских пластин.

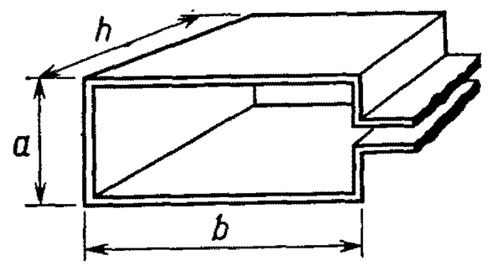
П1.20. *Расходящиеся пластины*

$$L = \mu_0 \frac{sl}{h_1 - h_2} \ln \frac{h_1}{h_2} K_{расх}. \tag{П1.30}$$

$K_{расх}$ определяется из $K_{пл}$ (фиг. П1.21).



Фиг. П1.22. Расходящиеся пластины.



Фиг. П1.23. Прямоугольная катушка.

$S = a \cdot b$ — поперечное сечение; N — полное число витков.

П1.21. *Прямоугольная катушка*

$$L = \mu_0 \frac{S}{h} K_r. \tag{П1.31}$$

Для $a/b \geqslant 0{,}3$:

$K_r(a, b; h) \approx K_L(h/2r_0)$, где K_L — поправочный коэффициент эквивалентного соленоида площадью $\pi r_0^2 = S$.

Для $a/b \leqslant 0{,}2$:

$K_r(a, b; h) \approx K_{пл}(a/h)$ — поправочный коэффициент пластины, см. фиг. П1.21.

Второе приложение Математические функции и формулы

§ 1. ФУНКЦИЯ ОШИБОК

П2.1. Эта функция, часто встречающаяся в диффузионных задачах для плоского случая, определяется следующим образом:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda, \tag{П2.1}$$

так что

$$\begin{aligned} &\operatorname{erf} 0 = 0, \\ &\operatorname{erf} \infty = 1, \\ &\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x, \end{aligned} \tag{П2.2}$$

и

$$\frac{d \operatorname{erf} x}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \tag{П2.3}$$

П2.2. Для малых значений x эта функция может быть выражена в виде сходящегося ряда

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}. \tag{П2.4}$$

Из уравнения (П2.4) видно, что она приближенно равна

$$\operatorname{erf} x \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} x.$$

Для больших значений x может быть использован полусходящийся ряд

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \ldots \right) \tag{П2.5}$$

с ошибкой, по абсолютной величине меньшей, чем последний оставшийся член ряда.

П2.3. Определим

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x; \tag{П2.6}$$

впоследствии мы также будем использовать интеграл от этой функции, обозначаемый в случае однократного интегрирования следующим образом:

$$\{i^1 \operatorname{erfc} x\} = \int_x^\infty \operatorname{erfc} \lambda \, d\lambda,$$

и в случае многократного интегрирования

$$\{i^n \operatorname{erfc} x\} = \int_x^\infty \{i^{n-1} \operatorname{erfc} \lambda\} \, d\lambda, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{П2.7}$$

Интегрирование по частям дает

$$\{i^1 \operatorname{erfc} x\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x \operatorname{erfc} x,$$

$$\{i^2 \operatorname{erfc} x\} = \frac{1}{4}\left[(1 + 2x^2) \operatorname{erfc} x - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}\right].$$

Используя метод индукции, получаем рекуррентную формулу

$$2n \{i^n \operatorname{erfc} x\} = \{i^{n-2} \operatorname{erfc} x\} - 2x \{i^{n-1} \operatorname{erfc} x\}, \tag{П2.8}$$

с помощью которой легко проверить, что

$$\{i^n \operatorname{erfc} 0\} = \frac{1}{2^n \Gamma\left(\frac{1}{2} n + 1\right)}. \tag{П2.9}$$

Из определения (П2.7) следует

$$\frac{d \{i^n \operatorname{erfc} x\}}{dx} = -\{i^{n-1} \operatorname{erfc} x\}; \tag{П2.10}$$

для особого случая $n = 0$ см. (П2.1) и (П2.6).

§ 2. ВЕКТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

П2.4. Составляющие некоторых векторных соотношений в различных системах координат приведены в табл. П2.I.

П2.5. Ниже приводятся некоторые векторные соотношения, используемые в тексте, в дифференциальной форме:

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + \psi (\nabla \cdot \mathbf{A}), \tag{П.2.11}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \tag{П.2.12}$$

ТАБЛИЦА П2.1

Составляющие векторных соотношений в криволинейных координатах

Векторное соотношение \ Координаты	Декартовы	Цилиндрические	Сферические
Ортогональные линейные элементы	$dx,\ dy,\ dz$	$dr,\ r\,d\vartheta,\ dz$	$dr,\ r\,d\vartheta,\ r\sin\vartheta\,d\varphi$
Градиент $\nabla\psi$	$(\nabla\psi)_x=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ $(\nabla\psi)_y=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ $(\nabla\psi)_z=\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\nabla\psi)_r=\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$ $(\nabla\psi)_\vartheta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$ $(\nabla\psi)_z=\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\nabla\psi)_r=\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$ $(\nabla\psi)_\vartheta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$ $(\nabla\psi)_\varphi=\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}$
Дивергенция $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta}\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial(\sin\vartheta A_\vartheta)}{\partial\vartheta}+$ $+\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
Ротор $\nabla\times\mathbf{A}$	$(\nabla\times\mathbf{A})_x=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}$ $(\nabla\times\mathbf{A})_y=\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}$ $(\nabla\times\mathbf{A})_z=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}$	$(\nabla\times\mathbf{A})_r=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\vartheta}-\dfrac{\partial A_\vartheta}{\partial z}$ $(\nabla\times\mathbf{A})_\vartheta=\dfrac{\partial A_r}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial r}$ $(\nabla\times\mathbf{A})_z=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r}-\dfrac{\partial A_r}{\partial\vartheta}$	$(\nabla\times\mathbf{A})_r=\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\left(\dfrac{\partial(\sin\vartheta A_\varphi)}{\partial\vartheta}-\dfrac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right)$ $(\nabla\times\mathbf{A})_\vartheta=\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}$ $(\nabla\times\mathbf{A})_\varphi=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r}-\dfrac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)$
Лапласиан $\nabla\cdot(\nabla\psi)=\nabla^2\psi=\Delta\psi$	$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\times$ $\times\left(\sin\vartheta\dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0, \tag{П2.13}$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{A})=(\nabla\psi)\times\mathbf{A}+\psi(\nabla\times\mathbf{A}), \tag{П2.14}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}, \tag{П2.15}$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}, \tag{П2.16}$$

$$\nabla\times(\nabla\psi)=0, \tag{П2.17}$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}). \tag{П2.18}$$

Заметим, что $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}$ представляет собой вектор, имеющий следующие составляющие, например, в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
&A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z} \qquad (\text{ось } x),\\
&A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_y}{\partial z} \qquad (\text{ось } y),\\
&A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z} \qquad (\text{ось } z).
\end{aligned} \tag{П2.19}$$

Третье приложение Системы единиц для электрических и магнитных величин и коэффициенты перевода

П3.1. В табл. П3.I приведены некоторые из наиболее важных соотношений электромагнитной теории, написанные в четырех различных системах единиц. В табл. П3.II дано определение электрических и магнитных величин в шести различных системах единиц и указаны коэффициенты перевода в систему МКСА, используемую в данной книге. Наконец, в табл. П3.III и П3.IV собраны значения некоторых часто используемых констант и коэффициентов перевода. (Подробное обсуждение проблемы выбора системы единиц см. в [2.1, 2.2, 2.4].)

ТАБЛИЦА П3.III

Константы

Величина	Значение
Магнитная проницаемость	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}$ Г·м$^{-1}$
Диэлектрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}8543 \cdot 10^{-12}$ Ф·м$^{-1}$
Скорость света	$c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} = 2{,}9979 \cdot 10^8$ м·с$^{-1}$
Постоянная Планка	$h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Заряд электрона	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$g = 9{,}807$ м·с$^{-2}$
Постоянная Больцмана	$k = R/N = 1{,}3805 \cdot 10^{-23}$ Дж·(°С)$^{-1}$
Число Авогадро	$N = 6{,}024 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

ТАБЛИЦА П3.1

Соотношения электромагнитной теории

Соотношение	Пункт	Система МКСА	Практическая система электрических единиц	Система СГСМ	Гауссова система [1]
Закон Максвелла	2.1	$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}+\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{H}=0{,}4\pi\mathbf{j}+\dfrac{10^{-12}}{9}\dfrac{\partial(\varepsilon_R\mathbf{E})}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}+\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{H}=\dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$
		$\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$	$\nabla\times\mathbf{E}=-10^{-8}\,\partial\mathbf{B}/\partial t$	$\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$	$\nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
		$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
		$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_e$	$\nabla\cdot(\varepsilon_R\mathbf{E})=1{,}13\times10^{13}\rho_e$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho_e$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho_e$
		$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$	$\mathbf{B}=\mu_R\mathbf{H}$	$\mathbf{B}=\mu_R\mathbf{H}$	$\mathbf{B}=\mu_R\mathbf{H}$
		$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$	—	$\mathbf{D}=(\varepsilon_R/c^2)\,\mathbf{E}$	$\mathbf{D}=\varepsilon_R\mathbf{E}$
Закон Ома	2.1	$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$	$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$	$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$	$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$
Закон Био — Савара	2.18	$\mathbf{H}=\dfrac{1}{4\pi}\int\dfrac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}\,dV$	$\mathbf{H}=0{,}1\int\dfrac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}\,dV$	$\mathbf{H}=\int\dfrac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}\,dV$	$\mathbf{H}=\dfrac{1}{c}\int\dfrac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}\,dV$
Соотношение Лоренца	5.1	$d\mathbf{F}=[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\,dV$	$d\mathbf{F}=0{,}1\,[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\,dV$	$d\mathbf{F}=[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\,dV$	$d\mathbf{F}=(1/c)\,[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\,dV$
		$\mathbf{F}=q\,[\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}]$	$\mathbf{F}=q\,[10^7\mathbf{E}+0{,}1\mathbf{u}\times\mathbf{B}]$	$\mathbf{F}=q\,[\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}]$	$\mathbf{F}=q\,[\mathbf{E}+(\mathbf{u}/c)\times\mathbf{B}]$
Закон Кулона		$F=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{q_1q_2}{r^2}$	$F=9\cdot10^{18}\dfrac{q_1q_2}{\varepsilon_Rr^2}$	$F=\dfrac{c^2}{\varepsilon_R}\dfrac{q_1q_2}{r^2}$	$F=\dfrac{q_1q_2}{\varepsilon_Rr^2}$
Плотность энергии магнитного поля	2.28	$\dfrac{1}{2}\mu H^2$	$\mu_R\dfrac{H^2}{8\pi}$	$\mu_R\dfrac{H^2}{8\pi}$	$\mu_R\dfrac{H^2}{8\pi}$
Вектор Пойнтинга	2.28	$\mathbf{P}=[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$	$\mathbf{P}=\dfrac{10^8}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$	$\mathbf{P}=\dfrac{1}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$	$\mathbf{P}=\dfrac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$
Мощность джоулевых потерь	2.28	j^2/σ	$10^7j^2/\sigma$	j^2/σ	j^2/σ
Ларморовская частота		$\omega=eB/m$	$\omega=eB/m$	$\omega=eB/m$	$\omega=eB/mc$

[1] В некоторых учебниках (например, [2.4]) уравнения содержат j вместо j/c.

23—99

ТАБЛИЦА П3.II

Электромагнитные единицы

Величина	Обозначение	Единица СИ (рационализированная система МКС)	Практическая систе трических единиц
			основные единицы
Длина	l	м	см
Масса	M	кг	г
Время	t	с	с
Сила	F	м·кг·с$^{-2}$ = Н (ньютон)	см·г·с$^{-2}$ = дин
Давление	p	Н·м$^{-2}$ = ПА (паскаль)	дин·см$^{-2}$
Энергия	W	Н·м = Дж (джоуль)	дин·см = эрг
Мощность	P	Дж·с$^{-1}$ = Вт (ватт)	эрг·с$^{-1}$
Скорость	u	м·с$^{-1}$	см·с$^{-1}$
Напряженность магнитного поля	H	А·м$^{-1}$ = Э (эрстед)	Э
Магнитная индукция	B	кг·с$^{-2}$·А$^{-1}$ = Вб·м$^{-2}$ = = Т (тесла)	Гс
Магнитный поток	Φ	м^2·кг·с$^{-2}$·А$^{-1}$ = = Вб (вебер)	см^2·Гс = = Мкс (максвелл)
Индуктивность	L	м^2·кг·с$^{-2}$·А$^{-2}$ = = с·А$^{-1}$·В = Г (генри)	Г
Напряжение	U	м^2·кг·с$^{-3}$·А$^{-1}$ = В (вольт)	В
Напряженность электрического поля	E	В·м$^{-1}$	В·см$^{-1}$
Электрический ток	I	А (ампер)	А
Плотность тока	j	А·м$^{-2}$	А·см$^{-2}$
Электрический заряд	q	А·с = Кл (кулон)	К
Электрическая индукция	D	м$^{-2}$·с·А = м$^{-2}$·Кл	—
Емкость	C	м$^{-2}$·кг$^{-1}$·с^4·А^2 = = с·А·В$^{-1}$ = Ф (фарада)	Ф
Сопротивление	R	м^2·кг·с$^{-3}$·А$^{-2}$ = = А$^{-1}$·В = Ом	Ом
Электропроводность	σ	Ом$^{-1}$·м$^{-1}$ = См (сименс)·м$^{-1}$	Ом$^{-1}$·см$^{-1}$

[1] $c = 3 \cdot 10^{10}$.

ма элек- СГС	СГСМ		СГС	
коэффициент перевода в МКС	основные единицы	коэффициент перевода в МКС	основные единицы	коэффициент перевода в МКС 1)
10^{-2} 10^{-3} 1 10^{-5} 10^{-1} 10^{-7} 10^{-7} 10^{-2}	Как в системе СГС		Как в системе СГС	
$10^3 (4\pi)^{-1}$	$см^{-1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1} = Э$	$10^3 (4\pi)^{-1}$	$см^{1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-2}$	$10^3(4\pi c)^{-1}$
10^{-4}	$см^{-1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1} = Гс$	10^{-4}	$см^{-3/2} \cdot г^{1/2}$	$10^{-4}c$
10^{-8}	$см^{3/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1} = см^2 \cdot Гс =$ = Мкс (максвелл)	10^{-8}	$см^{1/2} \cdot г^{1/2}$	$10^{-8}c$
1	см	10^{-9}	$см^{-1} \cdot с^2$	$10^{-9}c^2$
1	$см^{3/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-2}$	10^{-8}	$см^{1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1}$	$10^{-8}c$
10^2	$см^{1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-2}$	10^{-6}	$см^{-1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1}$	$10^{-6}c$
1	$см^{1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1}$	10	$см^{3/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-2}$	$10c^{-1}$
10^4	$см^{-3/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1}$	10^5	$см^{-1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-2}$	10^5c^{-1}
1	$см^{1/2} \cdot г^{1/2}$	10	$см^{3/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1}$	$10c^{-1}$
—	$см^{-3/2} \cdot г^{1/2}$	$10^5 (4\pi)^{-1}$	$см^{-1/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1}$	$10^5 (4\pi c)^{-1}$
1	$см^{-1} \cdot с^2$	10^9	см	10^9c^{-2}
1	$см \cdot с^{-1}$	10^{-9}	$см^{-1} \cdot с$	$10^{-9}c^2$
10^2	$см^{-2} \cdot с$	10^{11}	$с^{-1}$	$10^{11}c^{-2}$

Некоторые коэффициенты перевода

Напряженность магнитного поля (H) Магнитная индукция (B)	1 Э = 79,58 $А \cdot м^{-1}$ 1 Гс = 10^{-4} $Вб \cdot м^{-2}$
Энергия	1 эВ = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Дж 1 эрг = 10^{-7} Дж 1 кал = 4,184 Дж 10^9 кал = $4{,}18 \cdot 10^9$ Дж
Давление	1 бар = 10^5 $Н \cdot м^{-2}$ = 10^5 Па 1 атм = $0{,}980 \cdot 10^5$ $Н \cdot м^{-2}$
Температура	0 °С = 273,16 К 1 эВ = $1{,}16 \cdot 10^4$ К

Четвертое приложение Уравнения магнитной гидродинамики

§ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

П4.1. В этом пункте будут приведены уравнения магнитной гидродинамики в форме, наиболее удобной для расчетов взаимодействия сверхсильных магнитных полей с металлическими проводниками. При этом мы пренебрегаем токами смещения (п. 2.2) и эффектами вязкости; электропроводность (σ) и теплопроводность (λ) полагаются переменными (но изотропными), магнитная проницаемость μ полагается постоянной. Через r в уравнениях обозначим вектор, определяющий положение элемента жидкости, так что

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{П4.1}$$

есть скорость, и $\rho = 1/V$, p, ε — соответственно массовая плотность, гидродинамическое (изотропное) давление и удельная энергия. Выражение

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$$

или

$$\frac{D\mathbf{H}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{H} \tag{П4.2}$$

определяет *субстанциональную* (или лагранжеву) *временну́ю производную*, характеризующую изменение во времени данной величины (например, скаляра ρ или вектора $\mathbf{H}$), связанной с данной движущейся частицей вещества. Уравнения для жидкости представляют собой: *уравнение непрерывности* [оно отражает закон сохранения массы вещества; см. уравнение (9.5)]

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}; \tag{П4.3}$$

уравнение Эйлера [эквивалентное закону Ньютона; см. также уравнение (9.34)]

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{F}_M; \tag{П4.4}$$

уравнение (5.8) определяет величину электромагнитной силы

$$\mathbf{F}_M = \mathbf{j} \times \mu\mathbf{H} = \mu(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} - \frac{1}{2}\mu\nabla H^2; \qquad (\text{П}4.5)$$

термодинамическое уравнение в общем виде [выражающее закон сохранения энергии; см. также уравнение (9.35)]

$$\rho\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{j^2}{\sigma} + \nabla\cdot(\lambda\nabla\theta). \qquad (\text{П}4.6)$$

Последнее уравнение показывает, что приращение плотности внутренней энергии происходит за счет работы, совершаемой против гидродинамических сил, за счет джоулева тепла и за счет градиента плотности теплового потока. К указанной системе уравнений следует присоединить уравнение состояния жидкости (металла), которое может быть задано, например, в виде

$$p = p(\theta, \rho),$$
$$\varepsilon = \varepsilon(\theta, \rho) \qquad (\text{П}4.7)$$

[см. уравнение (10.28)].

П4.2. Наконец, рассмотрим *электромагнитные уравнения*. Напишем выражение для напряженности электрического поля в движущейся системе отсчета (см. п. 2.5)

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mu\mathbf{H}; \qquad (\text{П}4.8)$$

тогда уравнения электромагнитного поля примут вид

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \qquad (\text{П}4.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^* = -\frac{D(\mu\mathbf{H})}{Dt} - \mu\mathbf{H}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + (\mu\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \qquad (\text{П}4.10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}^*. \qquad (\text{П}4.11)$$

Кроме того, должно выполняться, конечно, условие $\nabla\cdot(\mu\mathbf{H}) = 0$.

Задача является полностью определенной, если к написанным выше уравнениям добавляются соответствующие начальные и граничные условия, а σ и λ являются известными функциями, например,

$$\sigma = \sigma(\theta, \rho),$$
$$\lambda = \lambda(\theta, \rho)$$

[см. уравнения (10.72) и (10.76)].

Заметим, что при введении напряженности электрического поля $\mathbf{E}^*$ и при рассмотрении $D/Dt \to d/dt$ в виде полной производной по времени уравнения магнитной гидродинамики записываются в *лагранжевой форме*, т. е. по отношению к системе координат, движущейся вместе с жидкостью. С другой стороны, если используется напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ (см. уравнения в п.9.11) и производная рассматривается в том виде, в каком она дается в уравнении (П4.2), то уравнения записываются в *эйлеровой форме*, т. е. по отношению к системе координат, фиксированной в пространстве.

П4.3. Теперь можно обобщить соотношение, приведенное в п. 2.27 и заключающее в себе закон сохранения энергии. Умножим уравнение (П4.9) на **E***, уравнение (П4.10) на **H**, уравнение (П4.11) на **u** и сложим их вместе с уравнением (П4.6). Произведя ряд векторных преобразований (см. п. П2.5) и используя уравнение (П4.3), получим

$$\rho\left[\frac{D\varepsilon}{Dt}+\frac{1}{2}\frac{Du^2}{Dt}+\frac{1}{2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mu}{\rho}\mathbf{H}^2\right)\right]=-\nabla\cdot(\mathbf{E}^*\times\mathbf{H})-\nabla\cdot(p\mathbf{u})+$$
$$+\nabla\cdot(\lambda\nabla\theta)-\frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{H}^2\mathbf{u})+\mathbf{u}\cdot(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}.$$

Рассматривая (П2.19) и учитывая (П2.11), найдем, что сумма двух последних членов равна

$$\mathbf{H}\cdot\nabla\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{H})=\nabla\cdot[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{H})\,\mathbf{H}]$$

Интегрируя по объему V, ограниченному замкнутой поверхностью S, движущейся в квазистационарном магнитном поле жидкости, окончательно получаем

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_M\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\frac{\mu}{\rho}H^2\right)dM=$$
$$=\oint\limits_{\mathbf{S}}\left\{-(\mathbf{E}^*\times\mathbf{H})+\lambda\nabla\theta-p\mathbf{u}+\left[\mu\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{H})\,\mathbf{H}-\frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2\mathbf{u}\right]\right\}d\mathbf{s}. \quad (\text{П}4.12)$$

При выводе этого соотношения были использованы теорема Стокса и уравнение (2.11), а интегрирование по объему было заменено интегрированием по массе ($dM=\rho dV$). Это соотношение представляет собой запись *закона сохранения энергии*. Действительно, оно показывает, что возрастание полной энергии движущейся жидкости с массой M (левая часть уравнения) происходит за счет потока магнитного поля, определяемого вектором Пойнтинга, термодиффузии и работы, совершаемой гидродинамическими и магнитными силами (правая часть уравнения).

Если проинтегрировать (П4.10), то получим уравнение, описывающее *сохранение магнитного потока* (по отношению к поперечному сечению движущейся жидкости S, ограниченному контуром C):

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_S\mu\mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}=-\oint\limits_C\mathbf{E}^*\cdot d\mathbf{l}-\int\limits_S[\mu\mathbf{H}\,(\nabla\cdot\mathbf{u})-(\mu\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}]\,d\mathbf{s}. \quad (\text{П}4.13)$$

§ 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОДНОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

П4.4. Все примеры, рассмотренные в гл. 9, относились к случаю цилиндрической одномерной геометрии (переменные радиус и время), причем вектор напряженности магнитного поля был строго аксиальным (H_z, E_ϑ^*, j_ϑ, u_r). Запись в такой геометрии основных уравнений, выведенных в предыдущих пунктах, приводится ниже. Используя векторные соотношения из п. П2.4 и запись

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_r\frac{\partial}{\partial r},$$

после ряда несложных преобразований получаем уравнения магнитной гидродинамики

$$\frac{D\rho}{Dt}=-\frac{\rho}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}, \tag{П4.14}$$

$$\rho\frac{Du_r}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial r}+j_\vartheta\mu H_z, \tag{П4.15}$$

$$\rho\frac{D\varepsilon}{Dt}=-\frac{p}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{j_\vartheta^2}{\sigma}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) \tag{П4.16}$$

и уравнения электродинамики

$$\frac{\partial H_z}{\partial r}=-j_\vartheta, \tag{П4.17}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\vartheta^*)}{\partial r}=-\mu\frac{DH_z}{Dt}-\mu\frac{H_z}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}, \tag{П4.18}$$

$$j_\vartheta=\sigma E_\vartheta^*, \tag{П4.19}$$

где

$$E_\vartheta^*=E_\vartheta-\mu H_z u_r. \tag{П4.20}$$

П4.5. Из этих уравнений можно вывести ряд полезных выражений. Например, используя их, можно легко вывести соотношения, описывающие сохранение энергии и магнитного потока (П4.12), (П4.13), или, исключая j_ϑ и E_ϑ^*, получить выражение

$$\frac{DH_z}{Dt}=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{\sigma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\right]+\frac{H_z}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}. \tag{П4.21}$$

Это выражение является *обобщенным уравнением диффузии* магнитного поля, причем добавочный член этого уравнения описывает возрастание поля за счет сжатия магнитного потока.

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1 [1]

(Включая литературу, имеющую отношение к вопросам, разбираемым в книге)

А. ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИЙ И КНИГИ ПО СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЯМ

1.1. High Magnetic Fields, eds. H. Kolm. B. Lax, F. Bitter, R. Mills, в книге High Magnetic Fields, New York, 1962.

1.2. *Gauster W. F.*, *Parker C. E.*, в книге High Magnetic Fields, p. 3. Some Concepts for the Design of Superconducting Solenoids.

1.3. *Garrett M. W.*, в книге High Magnetic Fields, p. 14. The Method of Zonal Harmonics.

1.4. *Gaume F.*, в книге High Magnetic Fields, p. 27. New Solenoid Magnets.

1.5. *Wakefield K. E.*, в книге High Magnetic Fields, p. 39. Network Solution of a System Containing Force-free Coil and a Force-bearing Shell.

1.6. *Welles D. R.*, в книге High Magnetic Fields, p. 44. Force-reduced Toroidal Systems.

1.7. *Christensen U. R.*, в книге High Magnetic Fields, p. 48. A Method of Controlling Magnetic Flux Path.

1.8. *Grivet P.*, в книге High Magnetic Fields, p. 54. High Field Magnetometry.

1.9. *Braams C. M.*, в книге High Magnetic Fields, p. 109. Optimal Design of Solenoids.

1.10. *Purcell J. R.*, в книге High Magnetic Fields, p. 166. An Aluminium Magnet Cooled with Liquid Hydrogen.

1.11. *Cioffi P. P.*, в книге High Magnetic Fields, p. 202. High-power Solenoid with External Magnetic Circuit.

1.12. *Fakan J. C.*, в книге High Magnetic Fields, p. 210. The Homopolar Generator as an Electromagnet Power Supply.

1.13. *Blamey J. W.*, *Smith W. I. B.*, в книге High Magnetic Fields, p. 217. The Canberra Homopolar Generator.

1.14. *Klaudy P.*, в книге High Magnetic Fields, p. 218. The Graz Homopolar Machine.

---

[1] В библиографических списках к гл. 1, 9 и 10, которые состоят из нескольких разделов, нумерация позиций не непрерывна. Разрывы связаны, очевидно, с тем, что автор составлял библиографию к каждому разделу независимо и резервировал для них определенное число позиций, часть из которых осталась незаполненной.— *Прим. ред.*

1.15. *Furth H. P.*, в книге High Magnetic Fields, p. 235.
Pulsed Magnets.
1.16. *Howland B.*, *Foner S.*, в книге High Magnetic Fields, p. 249.
Flux Concentration by Stationary Conductors.
1.17. *Mawardi O. K.*, в книге High Magnetic Fields, p. 259.
Flux Concentration by Hydromagnetic Flow.
1.18. *Fowler C. M.*, *Caird R. S.*, *Garn W. B.*, *Thomson D. B.*, в книге High Magnetic Fields, p. 269.
Flux Concentration by Implosion.
1.19. *Levine M. A.*, в книге High Magnetic Fields, p. 277.
Force-free Pulsed Coils.
1.20. *Zijlstra H.*, в книге High Magnetic Fields, p. 281.
Pulsed Solenoids for Multisecond Pulses.
1.21. *Roeland L.*, *Muller F. A.*, в книге High Magnetic Fields, p. 287.
Pulsed Fields of Long Duration.
1.22. *Van der Sluijs J. C. A.*, в книге High Magnetic Fields, p. 290.
Hydrogen-cooled Pulsed Magnets.
1.23. *Skellett S.*, в книге High Magnetic Fields, p. 296.
Design of 100-kG Pulsed Coils for Phoenix-mirror Machine.
1.24. *Carruthers R.*, в книге High Magnetic Fields, p. 307.
The Storage and Transfer of Energy.
1.25. *Adams C. G.*, в книге High Magnetic Fields p. 319.
Pulsed Motor-generator Sets.
1.26. *Brown G.*, в книге High Magnetic Fields, p. 370.
Magnetic Radiation Shielding.
1.27. Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, EUR 2750. e, eds. H. Knoepfel and F. Herlach, Brussels, 1966.
1.28. *Fowler C. M.*, *Caird R. S.*, *Garn W. B.*, *Thomson D. B.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 1.
The Los Alamos Flux Compression Program from its Origin.
1.29. *Brin A.*, *Besançon J. E.*, *Champetier J. L.*, *Plantevin J. P.*, *Vedel J.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 21.
Compression de champ magnétique.
1.30. *Kidder R. E.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 37.
The Compression of Magnetic Field Inside a Hollow Explosive-Driven Cylindrical Conductor.
1.31. *Lehner G.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 55.
Limitations on Maximum Magnetic Fields Obtainable by Flux Compression Due to Finite Conductivity.
1.32. *Somon J. P.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 67.
Magnetic Fields Obtained by Flux Compression. Limitation Due to the Dynamics of the Cylindrical Liner.
1.33. *Caird R. S.*, *Garn W. B.*, *Thomson F. B.*, *Fowler C. M.*, Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 101.
A Cylindrical Explosive Flux-Compression System.
1.34. *Chapman R. L.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 107.
Development of Magnetic Field Compression Technique for Metallic Particle Acceleration.
1.35. *Herlach F.*, *Knoepfel H.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 147.
Results and Limitations of Cylindrical Flux Compression Experiments.

1.36. *Cowan M.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 167.
Energy Conversion Efficiency in Flux Compression.
1.37. *Bryant A. R.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 183.
The Effect of Joule Heating on the Diffusion of Megagauss Fields into Metals.
1.38. *Albertoni S.*, *Cercignani C.*, *Taroni A.*, *Guerri L.*, Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 203.
Numerical Computation Methods for Implosion Processes.
1.39. *Somon J. P.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 235.
Magnetic Fields Obtained by Flux Compression. Limitation due to the Diffusion of the Field in the Cylindrical Liner.
1.40. *Besançon J. E.*, *Champetier J. L.*, *Leclanche Y.*, *Plantevin J. P.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 263.
Theory of Magnetic Field Compression. Diffusion, Surface Instabilities.
1.41. *Herlach F.*, *Knoepfel H.*, *Luppi R.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 287.
Magnetic Field and Current Amplification with Non-Cylindrical Explosive Systems.
1.42. *Waniek R. W.*, *Furth H. P.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 305.
Use of a Pulse Transformer to Generate Multi-Megampere Currents for High-Field Research.
1.43. *Besançon J. E.*, *David J.*, *Vedel J.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 315.
Ferroelectric Transducers.
1.44. *Besançon J. E.*, *Champetier J. L.*, *Leclanche Y.*, *Vedel J.*, *Plantevin J. P.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 331.
Ferromagnetic Transducers.
1.45. *McKinnon C. N.*, *Jones M. S.*, *Jr.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 349.
Explosive Driven Linear MHD Generators.
1.46. *Burnham M. W.*, *Marshall S. J.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 367.
Some Experiments Related to Explosive Driven MHD Converters.
1.47. *Linhart J. G.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 387.
Plasma Physics and Megagauss Fields.
1.48. *Lukasik S. J.*, *Zepko G. W.*, *Jameson R. L.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 397.
Magnetic Flux Compression in an Explosion Geometry.
1.49. *Di Gregorio C.*, *Herlach F.*, *Knoepfel H.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 421.
Simple Flux Compression Devices with a Small Explosive Charge.
1.50. *McKinnon C. N.*, *Jones M. S.*, *Jr.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 437.
Pulsed Electrical Power Generation from Magnetically Loaded Explosives.
1.51. *Cummings D. B.*, *Morley M. J.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 451.
Electrical Pulses from Helical and Coaxial Explosive Generators.
1.52. *Herlach F.*, *Knoepfel H.*, *Luppi R.*, *van Montfoort J. E.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 471.
Faraday Rotation in Megagauss Fields.

1.53. *Olsen J. L.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 483.
Remarks on the Use of Very High Pulsed Fields in Solid State Research.
1.54. *Thomson D. B., Caird R. S., Garn W. B., Fowler C. M.*, в книге Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, p. 491.
Plasma Compression by Explosively Magnetic Fields.
1.55. Les Champs Magnétiques Intenses (Paris 1967).
1.56. *Bitter F.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 19.
Histoire des champs magnétiques intenses et leurs contributions à la physique.
1.57. *Kurti N.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 31.
High Magnetic Fields and Nuclear Cooling.
1.58. *Weil L.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 41.
Les Champs magnétiques intenses en physique du solide aux très basses températures.
1.59. *Montgomery D. B.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 51.
High Field Magnets at the National Magnet Laboratory.
1.60. *Lax B.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 61.
Physics with High Magnetic Fields at the National Magnet Laboratory.
1.61. *Delcroix J. L.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 317.
Champs magnetiques intenses et plasmas.
1.62. *Herlach F., Knoepfel H., Luppi R., van Montfoort J. E.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 325.
Explosive Megagauss Generators for Application in Experimental Physics.
1.63. *Erber T., Forsberg G. K., Latal H. G., Mazzie J. A., Kennedy J. E.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 335.
The I.T.T. Flux Compression Facility.
1.64. *Besançon J. E., Vedel J.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 345.
Production de champs magnétiques.
1.65. *Shearer J. W.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 355.
Very High Magnetic Fields Produced by Capacitorbank Discharge.
1.66. *Forster D. W., Martin J. C.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 361.
2.5 Megagauss from a Capacitor Discharge.
1.67. *Bergmann W. H.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 371.
Experiments with a Bubble Chamber in Fast Pulsed Fields of up to 225 kG.
1.68. *Rioux G.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 373.
Réalisation d'une bobine de 100 kG accouplée à une géneratrice impulsionelle.
1.69. *Van Intterbeek A., van Driessche W., de Grave I., Mynche H.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 379.
Une installation de production de champs magnétiques intenses pulses.
1.70. *Foner S.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 385.
Large Volume Pulsed Field Coils. Applications to Synchronous Pulse Operation from 250 to 500 kG.
1.71. *Cros Y., Guillot M., Pauthenet R.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 391.
Calcul et réalisation des bobines de champ pulsé.
1.72. *Busch G., Vogt O., Schwob P.*, Les Champs Magnétiques Intenses, p. 401.
Pulsed Magnetic Fields Applied to the Investigation of Magnetic Properties of Some Rare Earth Compounds.
1.73. *Барков Л. М., Хакимов С. Х., Огурцов В. В.*, Les Champs Magnetiques Intenses, p. 409.
Production of the Strong Pulsed Magnetic Fields for the Experiments on High Energy Particles Accelerators. II— Heat Release and Mechanical Stresses in the Pulsed Magnetic Field Coils.
1.74. Physics of Solids in Intense Magnetic Fields, Proc. Summer School, Chania, Greece 1967, New York, 1969.
1.75. *Knoepfel H.*, Physics of Solids in Intense Magnetic Fields, p. 467.

Megaoersted Fields and their Relation to the Physics of High Energy Density.
1.76. Physics of High Energy Density, Proc. Summer School, Varenna, 1969, eds. P. Caldirola and H. Knoepfel, New York, 1969.
1.77. *Parkinson D. H.*, *Mulhall B.*, Very High Magnetic Fields, London, 1967.
1.78. *de Klerk D.*, The Construction of High-Field Electromagnets, Oxford, 1965.
1.79. *Stevenson R.*, Les Champs Magnetiques Intenses, p. 169.
A cryogenic Magnet System for Quasi-continous Operation.
1.80. *Roeland L. W.*, *Muller F. A.*, *Gersdorf R.*, Les Champs Magnetiques Intensed, p. 175.
High Magnetic Fields, Very Constant During 0,1 sec.
1.81. *Knoepfel H.*, Physics of High Energy Density.
Cumulation of Electromagnetic Energy.

Б. ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ ПО СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЯМ

1.100. *Bitter F.*, Sci. Amer., **213**, 65 (1965).
Ultrastrong Magnetic Fields.
1.101. *Kolm H. H.*, *Freeman A. J.*, Sci. Amer. (April 1965).
Intense Magnetic Fields.
1.102. *Oswald B.*, ETZ-A 86 (H. 2), **40** (1965).
Hohe Magnetfelder und ihre Anwendung in der Plasmaphysik.
1.103. *Страховский Г. М.*, *Кравцов Н. В.*, УФН, **70**, 693, 1960.
Сильные магнитные поля
1.104. *Furth H. P.*, Science, **132**, 387 (1960).
High Magnetic Field Research.
1.105. *Montgomery D. B.*, в сб. Rep. Progr. Physics, Vol. **26**, p. 69 (Inst. of Physics, London, 1963).
The Generation of High Magnetic Fields.
1.106. *Herlach F.*, в сб. Rep. Progr. Physics, Vol. 25/1 (Inst. of Physics, London, 1968).
Megagauss Magnetic Fields.
1.107. *Kurti N.*, Journ. of the Inst. of Metals, **93**, 1 (1964).
The How and Why of Strong Magnetic Fields.
1.108. *Кремлев М. Г.*, УФН, **93**, 675 (1967).
Сверхпроводящие магниты.
1.109. *Lehner G.*, в книге Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 47, Springer, Berlin, 1968, p. 67.
Ueber die Grenzen der Erzeugung sehr hoher Magnetfelder.
1.110. *Somon J. P.*, Euratom Rep. EUR 4197f (1968).
Sur l'obtention de champs magnétiques intenses au moyen d'une implosion cylindrique.
1.111. Plasma Physics — Technology Index (Zentralstelle fur Atomkernenergie — Dokumentation; Inst. für Plasmaphysik, D-8046 Garching).

В. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

1.150. *Kubo R.*, *Miyake S. J.*, *Hashitsume N.*, Solid State Physics, Vol. **17**, eds. F. Seitz and D. Turnbull, New York, 1965.
Quantum Theory of Galvanomagnetic Effects at Extremely Strong Magnetic Fields.
1.151. *Erber T.*, Rev. Mod. Phys., **38**, 626 (1966).
High-Energy Electromagnetic Conversion Processes in Intense Magnetic Fields.
1.152. *Thomson D. B.*, *Caird R. S.*, *Ewing K. J.*, *Fowler C. M.*, *Garn W. B.*, *Crawford J. C.*, *Damerow R. A.*, Proc. APS Topical Conf. on Pulsed High Density Plasmas, Los Alamos, September 1967, p. H3-1.

1.153. *Hamm J. J., Knoepfel H., Kroegler H., Linhart J. G., Verbeek R.*, Proc. Third Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Vol. II, IAEA, Vienna, 1969, p. 629.
Very High Density Theta Pinch.
1.154. *Linhart J. G., Knoepfel H., Gourlan C.*, Nuclear Fusion, 1962 Supplement, Part 2, p. 733.
Amplification of Magnetic Fields and Heating of Plasma by a Collapsing Metallic Shell.
1.155. *Garn W. B., Caird R. S., Fowler C. M., Thompson D. B.*, Rev. Sci. Instr., **39**, 1313 (1968).
Measurement of Faraday Rotation in Megagauss Fields.
1.156. *Garn W. B., Caird R. S., Thomson D. B., Fowler C. M.*, Rev. Sci. Instr., **37**, 762 (1966).
Technique for Measuring Megagauss Magnetic Fields using Zeeman Effect.
1.157. *George N., Waniek R. W., Lee S. W.*, Appl. Optics, **4**, 253 (1965).
Faraday Effect at Optical Frequencies in Strong Magnetic Fields.

Г. ИСТОРИЯ ПРОБЛЕМЫ

1.200. *Капица П. Л.*, Proc. Roy. Soc., **A105**, 691 (1924).
A Method of Producing Strong Magnetic Fields.
1.201. *Капица П. Л.*, Proc. Roy. Soc., **A115**, 658 (1927).
Further Development of the Method of Obtaining Strong Magnetic Fields.
1.202. *Алексеевский Н. Е.*, УФН, **83**, 761 (1964).
Петр Леонидович Капица.
1.203. *Deslandres H., Pérot A.*, Compt. Rend., **158**, 226 (1914).
Contribution à la réalisation de champs magnétiques élevés. Concentration des ampères-tours dans un très petit volume.
1.204. *Deslandres H., Pérot A.*, Compt. Rend., **158**, 658 (1914).
Projet d'un électro-aimant susceptible de donner un champ magnétique de 100 000 Gauss.
1.205. *Deslandres H., Pérot A.*, Compt. Rend., **159**, 438 (1914).
Deuxieme série d'essais pour l'accroissement des champs magnétiques actuels. Emploi de l'eau avec le nouveau mode de refroidissement.
1.206. *Wall T. F.*, Journ. Inst. Elect. Engrs., **64**, 745 (1926).
The Generation of Very Intense Magnetic Fields.
1.207. *Bitter F.*, Rev. Sci. Instr., **7**, 479, 482 (1936).
The Design of Powerful Electromagnets (Parts I and II).
1.208. *Bitter F.*, Rev. Sci. Instr., **8**, 318 (1937).
The Design of Powerful Electromagnets (Part III).
1.209. *Bitter F.*, Rev. Sci. Instr., **10**, 373 (1939).
The Design of Powerful Electromagnets; The New Magnet Laboratory at M.I.T.
1.210. *Терлецкий Я. П.*, ЖЭТФ, **32**, 387 (1957).
Создание сильных магнитных полей при быстром схлопывании проводящей оболочки.
1.211. *Cockroft J. D.*, Phil. Trans. Roy. Soc., **A227**, 317 (1928).
The Design of Coils for the Production of Strong Magnetic Fields.
1.212. *Raoult G. R.*, Ann. Phys., **4**, 369 (1949).
1.213. *Fabry Ch.*, Eclairage Electrique, **17**, 133 (1898).
1.214. *Myers W. R.*, Journ. Sci. Instr., **30**, 237 (1953).
The Construction of Small Solenoids for the Production of Intense Magnetic Fields.
1.215. *Ince A. N.*, Instr. Electr. Engrs. (London), Monograph No **102M**, 25 (1954).
1.216. *Olsen J. L.*, Helv. Phys. Acta, **26**, 798 (1953).
1.217. *Champion K. S. W.*, Proc. Phys. Soc., **B 63**, 795 (1950).
The Production of Pulsed Magnetic Fields Using Condenser Energy Storage.

Д. РАЗНОЕ

1.250. *Brown R. E.*, Rev. Sci. Instr., 39, 547 (1968).
Device for Producing Very Low Magnetic Fields (см. также Physics Today, June 1968, p. 59).
1.251. *Kopfermann H.*, Nuclear Moments, New York, 1958.
1.252. *Laukien G.*, Kernmagnetische Hochfrequenz-Spektroskopie, Encycl. of Phys., Vol. 38/1, ed. S. Flügge, Springer, Berlin, 1957.
1.253. *Shirley D. A.*, *Westenbarger G. A.*, Phys. Rev., **138**, A170 (1965).
Systematics of Hyperfine Fields in an Iron Lattice.
1.254. *Van Montfoort J.*, *Verbeek R.*, L. G. I. Report 67/15, 1967.
Multichannel Digital Timers.
1.255. *Herlach F.*, *Knoepfel H.*, *Nencini D.*, *van Montfoort J.*, L.G.I.-Report 65/16, 1965. The Colleferro Experimental Site for Experiments with High Explosives.
1.256. *Herlach F.*, *Knoepfel H.*, *van Montfoort J. E.*, L.G.I.-Report 67/28, 1967.
The New Experimental Facility For Experiments with High Explosives at Colleferro.
1.257. *Canuto V.*, *Hong-Yee Chiu*, Phys. Rev., **173**, 1210 (1968).
Quantum Theory of an Electron Gas in Intense Magnetic Fields.
1.258. *Басов Н. Г.*, *Захаров С. Д.*, *Крюков П. Г.*, *Сенатский У. В.*, *Чекалин С. В.*, Proc. Intern. Quantum Electronics Conf., Miami, 1968.
Experiments for the Observation of Neutrons Produced by Focusing a High Power Laser onto a Lithium-Deuterite Target.
1.259. *Mather J. W.*, Phys. Fluids, 8, 366 (1965).
Formation of a High-Density Deuterium Plasma Focus.
1.260. Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse, eds. I. Robinson, A. Schild, E. L. Schucking, Chicago, 1965.

К главе 2

2.1. *Sommerfeld A.*, Electrodynamics, New York, 1952 (см. перевод: *А. Зоммерфельд*, Электродинамика, ИЛ, 1953).
2.2. *Smythe W. R.*, Static and Dynamic Electricity, 2nd ed., New York, 1950.
2.3. *Jackson J. D.*, Classical Electrodynamics, New York, 1962.
2.4. *Panofsky W. K. H.*, *Pillips M.*, Classical Electricity and Magnetism, Reading, Mass., 1955.
2.5. *Morse P. M.*, *Feshbach H.*, Methods of Theoretical Physics, New York, 1953.
2.6. *Sommerfeld A.*, Partial Differential Equations in Physics, New York, 1949 (см. перевод: *А. Зоммерфельд*, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950).
2.7. *Ollendore F.*, Berechnung magnetischer Felder, Springer, Wien, 1952.
2.8. Field Analysis, ed. D. Vitkovitch, London, 1966.
2.9. *Garret M. W.*, Journ. Appl. Phys., **22**, 1091 (1951).
Axialy Symmetric Systems for Generating and Measuring Magnetic Fields.
2.10. *Knobloch A.*, *Mantel J.*, *Roos G.*, *Schlageter H.*, *Werner F.*, Institut für Plasmaphysik, Garching IPP4/30 (1966).
Geometric High-Frequency Models and Potential Analogs for the Determination of Current and Field Distributions.
2.11. *Combes L. S.*, *Gallagher Ch. C.*, *Levine M. A.*, Rev. Sci. Instr., **37**, 1567 (1966).
Electrolytic Tank Analog for Magnetic Field Design.
2.12. *Francken J. C.*, Philips Techn. Rev., **21**, 10 (1959).
Resistance Networks.
2.13. *Larkin F. M.*, Culham Lab. Rep. CLM-R31 (1964).

Computer Programs for the Numerical Study and Graphical Display of Magnetic Fields.
2.14. *Brown G. V.*, *Flax L.*, Journ. Appl. Phys., 35, 1764 (1964).
Superposition of Semi-Infinite Solenoids for Calculating Magnetic Fields of Thick Solenoids.
2.15. *Brown G. V.*, *Flax L.*, NASA TN D 2494, September 1964.
Superposition Calculation of Thick Solenoid Fields from Semi-Infinite Solenoid Tables.
2.16. *Brown G. V.*, *Flax L.*, *Itean E. C.*, *Lawrence J. C.*, NASA TR R-170 (Dec. 1963).
Axial and Radial Magnetic Fields of Thick, Finite-Length Solenoids.
2.17. *Bardotti G.*, *Bertotti B.*, *Gianolio L.*, Journ. Math. Phys., 5, 1387 (1964).
Magnetic Configuration of a Cylindre with Infinite Conductivity.
2.18. *Шнеерсон Г. А.*, Nautchno-tekhniceski Informatsionny Bjulleten (Italian transl.) No 1 (1962).
Calcolo di un campo magnetico ad alta frequenza formato da un solenoide a sezione rettangolare con pareti grosse.
2.19. *Segal G. P.*, Rev. Sci. Instr., **37**, 1367 (1966).
Computer Program to Facilitate Design of Wire Wound, Pulsed Field Coils.
2.20. *Hart P. J.*, Universal Tables for Magnetic Fields of Filamentary and Distributed Circular Currents, Amsterdam, 1967.
2.21. *Морозов А. И.*, *Соловьев Л. С.*, в книге Rev. of Plasma Physics, Vol. 2, ред. М. А. Леонтович (Consultant Bureau, New York, 1966).
The Structure of Magnetic Fields.
2.22. *Snow C.*, Nat. Bur. Stand., Appl. Math. Series, **38** (1962).
Magnetic Fields of Cylindrical Coils and Annular Coils.
2.23. *Бирюков В. А.*, *Данилов В. И.*, ЖТФ, **31**, 428 (1962).
Магнитное поле прямоугольной катушки с током.
2.24. *Bhadra D.*, Rev. Sci. Instr., **39**, 1536 (1968).
Field due to Current in Toroidal Geometry.
2.25. *Durand E.*, Electrostatique et Magnétostatique, Paris, 1953.
2.26. *Lewis H. R.*, Journ. Appl., Phys., **37**, 2541 (1966).
Computation of Electrostatic and Rapidly Pulsed Magnetic Fields.
2.27. *Janicke L.*, *Krüger J.*, Report Jul-513-PP, Jülich 1968.
Berechnung eines gepulsten zweidimensionalen Magnetfeldes bei vorgegebener Spulengeometrie.
2.28. *Grover F. W.*, Inductance Calculations, New York, 1947.
2.29. *Kohlrausch F.*, Praktische Physik, Bd. **2**, Stuttgart, 1956, p. 324.
2.30. *Welsby V. G.*, The Theory and Design of Inductance Coils, London, 1964.
2.31. *Bartberger C. L.*, Journ. Appl. Phys., **21**, 1108 (1950).
The Magnetic Field of a Plane Circular Loop.

К главе 3

3.1. *Carslaw H. S.*, *Jaeger J. C.*, Conduction of Heat in Solids, (2nd ed., London, 1959).
3.2. *Crank J.*, The Mathematics of Diffusion, London, 1957.
3.3. *Carslaw H. C.*, *Jaeger J. C.*, Operational Methods in Applied Mathematics 2nd ed., London, 1948.
3.4. *Ландау Л. Д.*, *Лившиц Е. М.*, Механика сплошных сред. М., 1953.
3.5. American Institute of Physics Handbook, 2nd ed., New York, 1963.
3.6. *Bean C. P.*, *DeBlois R. W.*, *Nesbitt L. B.*, Journ. Appl. Phys , **30**, 1976 (1959).
Eddy-Current Method for Measuring the Resistivity of Metals.
3.7. *Kaden H.*, Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik, Springer, Berlin, 1959.

3.8. *McLachlan N. W.*, Bessel Functions for Engineers, 2nd ed., London, 1961.
3.9. *Jaeger J. C.*, Phil. Mag., **29**, 18 (1940).
Magnetic Screening by Hollow Circular Cylinders.
3.10. *King L. V.*, Phil. Mag. **XV**, 201 (1933).
Electromagnetic Shielding at Radio Frequencies.
3.11. *Weinstein M. A.*, Journ. Appl. Phys., **33**, 762 (1962).
Magnetic Decay in a Hollow Circular Cylinder.
3.12. *Latal H. G.*, Acta Phys. Austriaca, **22**, 284 (1966).
Seed Field Diffusion Through Liners.
3.13. *Kidder R. E.*, UCRL 5466 (1959).
Time-Dependent Behavior of Magnetic Fields Confined by Conducting Walls.
3.14. *Podgorzelski W.*, Integral Equations and their Applications, Oxford, 1966.
3.15. *Weinstein M. A.*, Journ. Appl. Phys., 37, 248 (1966).
Magnetic Decay in a Hollow Elliptic Cylinder.
3.16. *Weinstein M. A.*, Journ. Phys., 37, 3548 (1966).
Magnetic Decay in a Hollow Elliptic Cylinder, II.
3.17. *Casimir H. B. G.*, *Ubbink J.*, Philips Technical Rev., **28**, 271, 355 (1967).
The Skin-Effect.
3.18. *Watson G. N.*, Theory of Bessel Functions, 2nd ed., Cambridge, 1958.
3.19. *Канер Э. Л.*, *Гантмахер В. Ф.*, УФН, **94**, 193 (1968).
Аномальное проникновение электромагнитного поля в металл и радиочастотные размерные эффекты.
3.20. *Колесников П. М.*, ЖТФ, 38, 2014 (1968).
О диффузии сильного магнитного поля в нелинейных средах.

К главе 4

4.1. *Stansel N. R.*, Induction Heating, New York, 1949.
4.2. *Jahnke*, *Emde*, *Lösch*, Tables of Higher Functions, 6th ed., New York, 1960.
4.3. *Kidder R. E.*, UCRL 5467 (1969).
Nonlinear Diffusion of Strong Magnetic Fields into a Conducting Half-Space.
4.4. *Levine M. A.*, *Sampson J. L.*, *Waniek R. W.*, в книге Conf. on Extremely High Temperatures, Boston, 1958, New York, 1958, p. 251.
High Magnetic Field Research.
4.5. *Tucker T. J.*, *Neilson F. W.*, Sandia Rep. STCM 334—59 (51), Nov., 1959.
The Electrical Behavior of Exploding Wires.
4.6. *Kidder R. E.*, UCRL—6583 (1961).
On the Diffusion of Magnetic Field into a Conducting Gas in which Inertial Forces are Neglected.
4.7. *Zabusky N. J.*, Phys. Fluids, 5, 487 (1962).
Solutions for a Nonlinear Singular Magnetic Flux Diffusion Equation.
4.8. *Киселев М. И.*, *Станюкович К. П.*, ТВТ, 6, 87 (1966).
К теории нелинейного скин-эффекта.
4.9. *Knoepfel H.*, *Luppi R.*, в книге Exploiding Wires, Vol. 4, New York, 1968, p. 233.
The Electrical Conductivity of Metals at Very High Temperatures.
4.10. *Шнеерсон Г. А.*, Soviet Phys.-Tech. Phys., **10**, 1712 (1966).
Penetration of a Storng Pulsed Magnetic Field into a Thin-Walled Cylinder Heated by Induced Current.
4.11. *Cotti P.*, Z. angew. Math. und Phys., **11**, 17 (1960).
Ueber die Erzeugung von hohen, kurzzeitigen Magnetfeldern».
4.12. *Шнеерсон Г. А.*, ЖТФ, 37, 513 (1967).
Поверхностный эффект в сверхсильном магнитном поле.

К главе 5

5.1. *Plonsey R., Collin R. E.*, Principles and Applications of Electromagnetic Fields, New York, 1961.
5.2. *Steinberg D., Kidder R. E., Cecil A. B.*, UCRL-14931 Rep. June, 1966. A One-Dimensional Magnetohydrodynamics Code.
5.3. *Knoepfel H.*, в книге Behaviour of Dense Media Under High Dynamic Pressures, Paris, New York, 1968, p. 521. Megagauss Fields as a Transmitting Medium for Very High Pressures.
5.4. *Бондалетов В. Н.*, ЖТФ, 37, 280 (1967). Индукционное ускорение проводников.
5.5. *Herlach F., Knoepfel H.*, L. G. I. Rep. 63/23. On the Containment of Explosions.
5.6. *Lüst R., Schlüter A.*, Zs. Astrophys., **34**, 263 (1954).
5.7. *Dodd C. V., Deeds W. E.*, Journ. Appl. Phys., **38**, 13, 5045 (1967). Electromagnetic Forces in Conductors.
5.8. *Korski W. S., Lucy F. A., Sheffler R. G., Willig F. J.*, Journ. Appl. Phys., **23**, 1300 (1952). Fast Jets from Collapsing Cylinders.
5.9. *Harrison E. R.*, Plasma Phys., 9, 183 (1967). The Problem of Producing Energetic Macrons (Macroscopic Particles).
5.10. *Müller E. W.*, Phys. Rev., **102**, 618 (1956). Field Desorbtion.
5.11. *Maisonnier Ch.*, Nuovo Cimento, **42B**, 332 (1966). Macroparticle Accelerators and Thermonuclear Fusion.
5.12. *Winterberg F.*, Journ. Nucl. Energy, Part C, 8, 541 (1966). Magnetic Acceleration of a Superconducting Solenoid to Hypervelocities.
5.13. *Lehner G., Linhart J. G., Maisonnier Ch.*, CNEN Rep. RTI/FI (64)2 (1964). Elementary Theory of Liners Accelerated by Magnetic Fields.
5.14. *Bennet F. D.*, Phys. Fluids, 8, 1425 (1965). Vaporisation Waves as a General Property of High Temperature Matter.
5.15. *Ebert H.*, Physikalisches Taschenbuch, Braunschweig, 1957.
5.16. *Beth R. A.*, Journ. Appl. Phys., **40**, 2445 (1969). Currents and Coil Forces as Contour Integrals in Two-Dimensional Magnetic Fields.
5.17. *Harvey J. F.*, Pressure Vessel Design Princeton, 1963.

К главе 6

6.1. *Van Montfoort J. E.*, Electronic Engineering, **194**, April 1968. Discharge-circuit Formula for the Evaluation of Capacitor-Bank Discharges.
6.2. *Baker D. A., McRoberts M.D.J., Mann L.W.*, Los Alamos Scientific Lab., Report LA-3500 UC-20, Controlled Thermonuclear Processes, TID4500 (1966). Pulsed Field Skin Effect Calculations for Cylindrical Conductors.
6.3. *Carruthers R.*, Proc. Inst. Elect. Engrs, **106A** (1959). Energy Storage for Thermonuclear Research.
6.4. *Huebener R. P., Govednik R. E.*, Rev. Sci. Instr., **37**, 1675 (1966). Superconducting Switch.
6.5. *Maisonnier Ch., Linhart J. G., Gourlan C.*, Rev. Sci. Instr., **37**, 1380 (1966). Rapid Transfer of Magnetic Energy by Means of Exploding Foils.
6.6. *Rioux C.*, 4th Symp. on Engineering Problems in Thermonuclear Research, Frascati, 1966. Experiment of Pulsating Unipolar Generator without Ferromagnetic Materials.
6.7. *Wong J., Fairbanks D. F., Randall R. N., Larson W. L.*, Journ. Appl. Phys., **39**, 2518 (1968).

Fully Stabilized Superconducting Strip for the Argonne and Brookhaven Bubble Chambers.
6.8. *Rebut P. H.*, *Torossian A.*, 4th Symp. on Engineering Problems in Thermonuclear Research, Frascati, 1966.
Production of Pulsed High Magnetic Fields with Asynchronous Generators.
6.9. *Schenk G.*, Proc. 5th Symp. on Fusion Technology, Oxford, 1968.
Exploding Foils for Inductive Energy Transfer.
6.10. *Rioux C.*, Ann. Phys., 9, 729 (1964).
Etude et réalisation d'une dynamo unipolaire a régime impulsionnel ne comportant pas de matériaux ferro-magnétiques.
6.11. *Early H. C.*, *Martin F. J.*, Rev. Sci. Instr., **36**, 1000 (1965).
Method of Producing a Fast Current Rise from Energy Storage Capacitors.
6.12. *Clark W. H.*, *Mynberg J. E.*, Rev. Sci. Instr., **37**, 883 (1966).
Megampere Pulse Transformer for Coaxial Load.
6.13. *Oswald B.*, Inst. für Plasmaphysik Report OPP 4/13 (1964).
Some Aspects of Superconducting Magnetic Energy Storage.
6.14. *Anderson O.*, *Baker W. R.*, *Bratenahl A.*, *Furth H. P.*, *Kunkel W. B.*, Journ. Appl. Phys., **30**, 188 (1959).
Hydromagnetic Capacitors.
6.15. *Hopkins*, *Pellissier*, UCRL-9968 (1961).
A High-Voltage Electrolytic Capacitor Bank.
6.16. *Walker R. C.*, *Early H. C.*, Rev. Sci. Instr., 29, 1020 (1958).
Half-Megampere Magnetic-Energy-Storage Pulse Generator.
6.17. *Salge J.*, *Brilka R.*, Report Nr. 43 (Instr. für Hochspannungstechnik, Braunschweig, 1968).
Investigations on Switching Schemes for Inductive Storage Systems.
6.18. *Ribe F. L.*, в книге Report LA-4351-MS (Los Alamos, 1969), p. 17.
Magnetic Energy Storage.
6.19. *Hopkins D. B.*, *Pellissier P. F.*, Rep. UCRL-9968 (Livermore, 1961).
A High-Voltage Electrolytic Capacitor Bank.
6.20. *Martin J. C.*, *MacAulay A.*, AWRE Rep. SSWA/JCM/686/36 (Aldermaston).
A Cheap Megajoule Bank.
6.21. *Smart D. L.*, Proc. Inst. Elect. Engrs, **106A**, Suppl. 107 (1959).
Some Switching Problems in Thermonuclear Research.
6.22. *Manning L. A.*, Electrical Circuits, New York, 1966.
6.23. *Kolb A. C.*, *Young M. P.*, *McLean E. A.*, Report LA-3770, Los Alamos, 1967.
Hard Core Thetapinch with Reverse Trapped Magnetic Field.
6.24. *Kemp E. L.*, *Quinn W. E.*, *Ribe F. L.*, *Sawyer G. A.*, Report LA-3770, Los Alamos, 1967.
The Scyllac Thetapinch.
6.25. *Kemp E. L.*, Rep. LA-2530, Los Alamos.
Considerations on the Design of Energy Storage Capacitor Banks.
6.26. *Yu Cheng D.*, Rev. Sci. Instr., **40**, 1153 (1969).
Application of a Variable Resistance to Arrest Oscillations in a Pulsed Capacitor Discharge Circuit.
6.27. *Oswald B.*, Inst. für Plasmaphysik Report IPP/4/1 (1962).
Berechnungsgrundlagen für Crowbar-und Power-Crowbar-Entladungen.
6.28. *Toschi R.*, L'Elettrotecnica, **53**, 1 (1966).
Sulla Produzione di Alte Correnti Impulsive.

К главе 7

7.1. *Foner S.*, *Kolm H. H.*, Rev. Sci. Instr., **27**, 547 (1956).
Coil for Pulsed Megagauss Fields.
7.2. *Foner S.*, *Kolm H. H.*, Rev. Sci. Instr., **28**, 799 (1957).
Coils for the Production of High-Intensity Pulsed Magnetic Fields.

7.3. *Fertl K. H., Herppich G., Knobloch A., Schlageter H.*, Inst. Plasmaphysik, Garching, Rep. IPP4/26, 1966.
New Fast Capacitor Banks in Garching.
7.4. *Wilson M. N., Srivastava K. D.*, Rev. Sci. Instr., **36**, 1096 (1965).
Design of Efficient Flux Concentrator for Pulsed High Magnetic Fields.
7.5. *Dukes J. M. C.*, Proc. Inst. Elect. Engrs., **103B**, 9, 319 (1956).
An Investigation into Some Fundamental Properties of Strip Transmission Lines with the Aid of an Electrolytic Tank.
7.6. *Шнеерсон Г. А.*, ЖТФ, **32**, 1153 (1962).
Получение сильного импульсного магнитного поля в сплошных одновитковых соленоидах малого объема.
7.7. *Гордиенко В. П., Шнеерсон Г. А.*, ЖТФ, **34**, 376 (1964).
Электрический взрыв скин-слоя.
7.8. *Гордиенко В. П., Шнеерсон Г. А.*, ЖТФ, **35**, 1084 (1965).
Исследование деформации одновитковых соленоидов в относительно медленно нарастающем сильном магнитном поле.
7.9. *Foner S., Fisher W. G.*, Rev. Sci. Instr., **38**, 440 (1967).
Solid Helix Magnets for Large Volume Pulsed High Fields.
7.10. *Kuskowski R. L., Novey T. B., Warshaw S. D.*, Rev. Sci. Instr., **32**, 674 (1961).
Design and Construction of a System of Pulsed Magnets.
7.11. *Milne J. D., Sheldon R., Srivastava K. D., Wilson M. N.*, Rev. Sci. Instr., **35**, 1229 (1964).
Insulation for 11 kV, 280 kG Pulsed Magnet.
7.12. *McCormick N. R.*, Culham Lab. Rep. CLM-P130, 1967.
A One-Megajoule Capacitor Bank for Nuclear Fusion Research.
7.13. *Pohl F.*, Institut für Plasmaphysik, Garching IPP/57 (1967).
Vakuum-Magnetfeld im Thetapinch: Vermeidung von Asymmetrien.
7.14. *Gambarelli M., Knoepfel H., Luppi R.*, CNEN-report, 1970.
The Generation of High Magnetic Fields by Single-Turn Solenoids.
7.15. *Вандакуров Ю. В., Колесникова Э. Н.*, ЖТФ, **37**, 1984 (1967).
Устойчивость твердого проводящего цилиндра в магнитном поле протекающего по нему тока.
7.16a. *Furth H. P., Waniek R. W.*, Rev. Sci. Instr., **27**, 195 (1956).
Production and Use of High Transient Magnetic Fields, I.
7.16b. *Furth H. P., Levine M. A., Waniek R. W.*, Rev. Sci. Instr., **28**, 949 (1957).
Production and Use of High Transient Magnetic Fields, II.
7.17. *Brechna H., Hill D. A., Bailey B. M.*, Rev. Sci. Instr., **36** (1965).
150 kOe Liquid Nitrogen Cooled Pulsed Flux-Concentration Magnet.
7.18. *Боровик Е. С., Бусол Ф. И., Гришин С. Ф.*, ЖТФ, **31**, 459 (1961).
Исследование возможности получения стационарных магнитных полей в катушках, охлаждаемых жидким водородом.
7.19. *Gersdorf R., Muller F. A., Roeland L. W.*, Rev. Sci. Instr., 36, 1100 (1965).
Design of High Field Magnet Coils for Long Pulses.
7.20. *Segal G. P.*, Rev. Sci. Instr., **37**, 1367 (1966).
Computer Program to Facilitate Design of Wire Wound, Pulsed Field Coils.
7.21. *Макарьин В. К., Мартемьянов В. П.*, ПТЭ, № 2, 147 (1966).
Установка для создания импульсного магнитного поля 100 кЭ в объеме 8 л.
7.22. *De Klerk D.*, Bull. Belg. Phys. Soc., Ser. V, № 2—3, 152 (1966).
The Production of Pulsed Magnetic Fields.
7.23. *Van der Sluys J. C. A., de Beun H. R., Zweers B. A., de Klerk D.*, Bull. Belg. Phys. Soc. Ser. V, № 2—3, 165 (1966).
Pulsed Magnetic Fields up to 380 kOe during 20 msec and Some Preliminary Results on the Resistive Transition of Nb_3Sn Ribbon in these Fields.

7.24. *Alldred J. C.*, *Scollar I.*, Journ. Sci. Instr., **44**, 755 (1967).
Square Cross Section Coils for the Production of Uniform Magnetic Fields.
7.25. *Cacak R. K.*, *Craig J. R.*, Rev. Sci. Instr., **46**, 1468 (1969).
Magnetic Field Uniformity around Near Nelmholtz Coil Configurations.
7.26. *Павловский А. И.*, *Кулешов Г. Д.*, *Склизков Г. В.*, *Зысин Ю. А.*, *Герасимов А. И.*, ДАН СССР, **160**, 1965.
Сильноточные безжелезные бетатроны.
7.27. *Evangelisti R.*, *Pasotti G.*, *Sacerdoti G.*, Nucl. Instr. and Methods, **16**, 189 (1962).
A Pulsed Magnet for High Magnetic Fields.
7.28. *Kolm H. H.*, *Mawardi O. K.*, Journ. Appl. Phys., **32**, 1296 (1961).
Hydromagnet: A Self-Generating Liquid Conductor-Electromagnet.
7.29. *Everett J. E.*, *Osemeikhian J. E.*, Journ. Sci. Instr., **43**, 470 (1966).
Spherical Coils for Uniform Magnetic Fields.
7.30. *Барков Л. М.*, *Огурцов В. В.*, *Хакимов С. Х.*, ПТЭ, № **2**, 129 (1966).
Расчеты катушек импульсного магнитного поля.
7.31. *Montgomery D. B.*, *Terrell J.*, National Magnet Lab. Rep. AFOSR-1525, 1961.
Some Useful Insformation for the Design of Air-Core Solenoids.
7.32. *Игнатченко В. А.*, *Карпенко М. М.*, ЖТФ, 38, 200 (1968).
О возможности постоянных сверхсильных магнитных полей.
7.33. *Roth R. O.*, *Gilleland J. R.*, Rev. Sci. Instr., **39**, 1696 (1968).
Small 10 kC Pulsed Magnet.
7.34. *Багдасаров Х. С.*, *Дохновский С. Б.*, *Ершов В. Н.*, *Охлишевич В. В.*, ПТЭ, № 4, 196 (1967).
Установка для создания импульсных магнитных полей до 1,2 МЭ.
7.35. *Shearer J. W.*, Journ. Appl. Phys., **40**, 4490 (1969).
Interaction of Capacitor-Bank-Produced Megagauss Magnetic Field with Small Single-Turn Coil.
7.36. *Котенко В. Г.*, *Лимарь А. Г.*, ЖТФ, **39**, 395 (1969).
Расчет охлажденных соленоидов для получения импульсных магнитных полей.
7.37. *Montgomery D. B.*, Solenoid Magnet Design, New York, 1969.
7.38. *Боровик Е. С.*, *Лимарь А. Г.*, *Литвиненко Ю. А.*, ЖТФ, 39, 1020 (1969).
Сильные импульсные магнитные поля в скрепленных многовитковых катушках.

К главе 8

8.1. *Lewin J. D.*, *Smith P. F.*, Rev. Sci. Instr., **35**, 541 (1964).
Production of Very High Magnetic Fields by Flux Compression.
8.2. *Patton A.*, *Millar W.*, Journ. Appl. Phys., **35**, 1141 (1964).
Compression of Magnetic Field between two Semi-infinite Slabs of Constant Conductivity.
8.3. *Cannon E. T.*, *Clark W. H.*, *Partridge W. S.*, Brit. Pat. 987. 545 (1965).
Improvements in or Relating to Methods and Apparatus for Converting Mechanical or Chemical Energy into Electrical Energy.
8.4. Aeronautical Syst. Div. Rep. ASD-TDR-63-38 (July 1963).
Multi-Stage Explosive-Magnetic Amplifier (FREDA).
8.5. *Сахаров А. Д.*, *Людаев Р. З.*, ДАН СССР, **165**, 65 (1965).
Магнитная кумуляция.
8.6. *Сахаров А. Д.*, УФН, 88, 725 (1966).
Взрывомагнитные генераторы.
8.7. *Shearer J. W.*, *Abraham F. F.*, *Aplin C. M.*, *Benham B. P.*, *Faulkner J. E.*, *Ford F. C.*, *Hill M. M.*, *McDonald C. A.*, *Stephens W. H.*, *Steinberg D. J.*, *Wilson J. R.*, Journ. Appl. Phys., **39**, 2102 (1968).
Explosive-Driven Magnetic-Field Compression Generators.

8.8. *Conger R. L.*, Journ. Appl. Phys., **38**, 2275 (1967).
Large Electric Power Pulses by Explosive Magnetic-Field Compression.
8.9. *Cnare E. C.*, *Cowan M.*, Report LA-4250, Los Alamos, 1969.
Pulsed Power From Explosive Generators.
8.10. *Frankenthal S.*, *Manley O. P.*, *Treve Y. M.*, Journ. Appl. Phys., **36**, 2137 (1965).
Design of Explosively Driven Electro-Mechanical Energy Converters.
8.11. *Биченков Е. И.*, ДАН СССР, № **4**, 779 (1967).
Взрывные генераторы.
8.12. *Conger R. L.*, *Johnson J. H.*, *Jong L. T.*, *Parks L. A.*, Rev. Sci. Instr., **38**, 1608 (1967).
Production of Large Electric Pulses by Explosive Magnetic Field Compression.
8.13. *Young F. J.*, Proc. IEEE, **56**, 92 (1968).
The Wave Nature of Megagauss Field Production.
8.14. *Crawford J. C.*, *Damerov R. A.*, Journ. Appl. Phys., 39, 5224 (1968).
Explosively Driven High-Energy Generator.
8.15. *Knoepfel H.*, *Kroegler H.*, *Luppi R.*, *van Montfoort J. E.*, Rev. Sci. Instr., **40**, 60 (1969).
The Generation and Switching of Magnetic Energies in the Megajoule Range by Explosive Systems.
8.16. *Кириллин В. А.*, *Альтов В. А.* и др., ДАН СССР, **185**, 316 (1969).
Взрывной магнитогидродинамический генератор со сверхпроводящей магнитной системой.
8.17. *Cumming D. B.*, Journ. Appl. Phys., **40**, 4146 (1969).
Cascading Explosive Generator with Autotransformer Couplings.
8.18. *Morin J.*, *Vedel J.*, *Besançon J. E.*, *Bernard J.*, Appl. Phys. Letters (1970).
High Currents by Explosive Generators with Helical and Cylindrical Coupled Stages.

К главе 9

А. ГЕНЕРАТОРЫ СВЕРХСИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

9.1. *Caird R. S.*, *Garn W. B.*, *Thomson D. B.*, *Fowler C. M.*, Journ. Appl. Phys., **35**, 781 (1964).
An Explosive-Driven High Field System for Physics Applications.
9.2. *Fowler C. M.*, *Garn W. B.*, *Caird R. S.*, Journ. Appl. Phys., **31**, 588 (1960).
Production of Very High Magnetic Fields by Implosion.
9.3. *Sterne T. E.*, Journ. Appl. Phys., **21**, 73 (1950).
A Note on Collapsing Cylindrical Shells.
9.4. *Waag R. C.*, *Freeman J. R.*, *Cnare E. C.*, Sandia Rep. SC-RR-66-423.
Magnetically Imploded Metal Foils.
9.5. *Шнеерсон Г. А.* (в печати).
9.6. *Herlach F.*, *Knoepfel H.*, *Luppi R.*, *van Montfoort J.*, Bull. Belg. Phys. Soc., Ser. V, № 2—3, 179 (1966).
Megaoersted Fields Generated Through Flux Compression.
9.7. *Drew G. T.*, *Speight C. S.*, *Wallace A. A.* (unpublished note A.W.R.E., 1967).
Experimental Techniques Used in an Explosive Flux Compression Program.
9.8. *Speight C. S.*, A.W.R.E. Report № 0-71/67, 1967.
Theoretical and Experimental Field Limitations in Cylindrical Flux Compression Experiments.
9.9. *NiCastro J.*, Phys. Fluids, **12**, 769 (1969).
Similitude of Shock-Wave Initiated Flux Compression.
9.10. *Lehner G.*, *Linhart J. G.*, *Somon J. P.*, Nucl. Fusion, **4**, 362 (1964).
Limitations on Magnetic Fields Obtained by Flux Compression.

9.11. *Erber T., Latal H. G.*, Rep. Progr. Phys., **33**, 1069 (1970).
Flux Compression Theories.
9.12. *Herlach F.*, Journ. Appl. Phys., **39**, 5191 (1968).
Flux Loss and Energy Balance in Magnetic Flux-Compression Experiments.
9.13. *Besançon J., Morin J., Vedel J.*, Compt. Rend., **267**, 1319 (B) (1968).
Compression cylindrique par explosif d'un flux magnétique; phase de rebondissement.
9.14. *Забабахин Е. И., Нечаев Н. Н.*, ЖЭТФ, **33**, 442 (1957).
Ударные волны и их кумуляция.
9.15. *Забабахин Е. И., Мордвинов Б. П.*, ЖЭТФ, **48**, 342 (1965).
Пример стационарной неограниченной кумуляции.
9.16. *Алиханов С. Г., Белан В. Г., Будкер Г. И., Иванченко А. И., Кичигин Г. Н., Комин А. В.*, CTR-Engineering Conf., Rome, 1966.
Production of Strong Magnetic Fields by Compression with Metallic Shells.
9.17. *Столов А. М., Ларионов В. А.*, CTR-Engineering Conf., Rome, 1966.
Production of Strong Pulsed Magnetic Fields by Electrodynamic Compression Method.
9.18. *Алиханов С. Г., Белан В. Г., Иванченко А. В., Карасик В. Н., Кичигин Г. Н.*, Journ. Sci. Instr. Series, **2**, 1, 543 (1968).
The Production of Pulsed Megagauss Fields by Compression of Metallic Cylinders in Z-Pinch Configuration.
9.19. *Latal H. G.*, Ann. Phys., **42**, 352 (1967).
Theory of the Cnare Effect.
9.20. *Herlach F., Knoepfel H.*, Rev. Sci. Instr., **36**, 1088 (1965).
Megagauss Fields Generated through Explosive Driven Flux Compression Devices.
9.21. *Schenk G., Linhart J. G.*, в книге Exploding Wires, Vol. 3, New York, 1964, p. 223.
Compression of Magnetic Fields by Exploding Foils.
9.22. *Cnare E. C.*, Journ. Appl. Phys., **37**, 3812 (1966).
Magnetic Flux Compression by Electrically Imploded Metallic Foils.
9.23. *Besançon J. E., Morin J., Vedel J. M.*, Appl. Phys. Letters, будет опубликовано (1970).
High Magnetic Fields by Unslotted Copper Liner Implosion.
9.24. *Калиткин Н. Н., Царева Л. С.*, ЖТФ, **39**, 1397 (1969).
Приближенная теория магнитной кумуляции.

Б. СТАБИЛЬНОСТЬ

9.50. *Chandrasekhar S.*, Hydrodynamic and Hydromagnetic Instability, Oxford, 1961.
9.51. *Harris E. G.*, Phys. Fluids, **5**, 1057 (1962).
Rayleigh-Taylor Instabilities of a Collapsing Cylindrical Shell in a Magnetic Field.
9.52. *Somon J. P.*, Journ. Fluid Mech., **38**, 769 (1969).
The Dynamical Instabilities of Cylindrical Shells.
9.53. *Taylor G.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A201**, 192 (1950).
The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes.
9.54. *Асланов С. К.*, ДАН СССР, **169**, 303 (1966).
К исследованию устойчивости ударных волн в воспроизводимых средах.
9.55. *Harlow F. H., Welch J. E.*, Phys. Fluids, **9**, 842 (1966).
Numerical Study of Large Amplitude Free-Surface Motions.
9.56. *Kruskal M., Schwarzschild M.*, Proc. Roy. Soc., **A223**, 348 (1954).
Some Instabilities of a Completely Ionized Plasma.

К главе 10

А. ПРОВОДИМОСТЬ

10.1. *Сирота Н. Н.*, ДАН СССР, **143**, 567 (1962).
О температурной зависимости электропроводности твердых тел.
10.2. *Абель М. Я., Песчанский В. Г.*, ЖЭТФ, 49, 572 (1965).
Сопротивление тонких пластин и проволок в сильном магнитном поле.
10.3. *Olsen J. L.*, Electron Transport in Metals, New York, 1962.
10.4. *Gerritsen A. N.*, Metallic Conductivity: Experimental Part, Encycl. of Phys., Vol. 19, ed. S. Flügge, Springer, Berlin, 1965.
10.5. *Jones H.*, Theory of Electrical and Thermal Conductivity in Metals, Encycl. of Phys., Vol. 19, ed. S. Flügge, Springer, Berlin, 1956.
10.6. *Cusack N. E.*, Rep. Progr. Physics, Vol. 26 (Inst. of Physics, London, 1963), p. 361.
The Electronic Properties of Liquid Metals.
10.7. *Landolt, Börnstein*, Zahlenwerte und Funktionen, Bände IV/2a, b, c; IV/3, Springer, Berlin, 1963, 64, 65 and 57.
10.8. Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials, New York, 1967; ed. Touloukian Y. S., Thermophysical Properties of Matter, New York, 1969.
10.9. Liquid Metals Handbook, eds. Lyon R. N., Washington D. C., 1952.
10.12. *Luthi B.*, Helv. Phys. Acta, **33**, 161 (1960).
Widerstandsänderung von Metallen in hohen Magnetfeldern.
10.13. *Parmenter R. H.*, Phys. Rev., **116**, 1390 (1959).
High-Current Superconductivity.
10.14. *Kaner E. A., Skobov V. G.*, Advan. Phys., **17**, 605 (1968).
Electromagnetic Waves in a Magnetic Field.
10.15. *Meaden G. T.*, Electrical Resistance of Metals, London, 1966.
10.16. *Вонсовский С. В.*, УФН, **76**, 467 (1962).
Магнетизм и электропроводность металлов.
10.17. *Mott N. F., Jones H.*, The Theory of the Properties of Metals and Alloys, New York, 1958.
10.19. *Solbes A., Kerrebrock J. L.*, Phys. Fluids, **10**, 2179 (1967).
Condensation and Electrical Conduction in Metallic Vapors.
10.20. Proceedings of the Exploding Wires Conference III, eds. Chace W. G., Moore H. K., New York, 1964.

Б. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ

10.50. *Альтшулер Л. В.*, УФН, **85**, 197 (1965).
Применение ударных волн в физике высоких давлений.
10.51. *Родионов К. П.*, УФН, **36**, 1287 (1966).
Влияние давления на теплоемкость металлов.
10.52. *Morris E.*, A.W.R.E. Report No 0-36/64, 1964.
The Equation of State of Copper and of Other Metals near their Critical Points.
10.53. *Уфлин В. Д.*, ЖЭТФ, **49**, 485 (1965).
Плавление при сверхвысоких давлениях, полученных в ударной волне.
10.54. *McQueen R. G., Marsh S. P.*, Journ. Appl. Phys., **31**, 1253 (1960).
Equation of State for 19 Metallic Elements from Shock-Wave Measurements to 2 Megabars.
10.55. *Альтшулер Л. В., Баканова А. А., Трунин Р. Ф.*, ЖЭТФ, **42**, 91 (1962).
Ударные адиабаты и нулевые изотермы семи металлов при высоких давлениях.
10.56. *Альтшулер Л. В., Крупников К. К., Бражник М. И.*, ЖЭТФ, **34**, 886 (1958).
Динамическая сжимаемость металлов при давлениях от четырехсот тысяч до четырех миллионов атмосфер.

10.57. *Альтшулер Л. В., Кормер С. Б.*, ЖЭТФ, **38**, вып. 3, 790 (1960).
Уравнения состояния алюминия, меди и свинца для области высоких давлений.
10.58. *Альтшулер Л. В., Крупников К. К.* и др., ЖЭТФ, **34**, 874 (1938).
Динамическая сжимаемость и уравнение состояния железа при высоких давлениях.
10.59. *Walsh J. M., Rice M. H., McQueen R. G., Yarger F. L.*, Phys. Rev., **108**, 196 (1957).
Shock-Wave Compression of Twenty-Seven Metals. Equation of State of Metals.
10.60. *Gilvarry J. J.*, Phys. Rev., **102**, 317 (1956).
Grüneisen's Law and the Fusion Curve at High Pressure.
10.61. *Mitra N. R., Decker D. L., Vanfleet H. B.*, Phys. Rev., **161**, 613 (1967).
Melting Curves of Copper, Silver, Gold and Platinum to 70 kbar.
10.62. *Somon J. P.*, L.G.I. Rep. 64/3, 1964.
L'équation d'état des solides.
10.63. *Dugdale J. S., MacDonald D.K.C.*, Phys. Rev., 89, 4 (1953).
The Thermal Expansion of Solids.
10.64. *Wilkins M. L.*, UCRL, 6797 (1962).
Shock Hydrodynamics.
10.65. *Кормер С. Б., Урлин В. Д., Попова Л. Т.*, ФТТ, **3**, 2131 (1961).
Интерполяционное уравнение состояния и его приложение к описанию экспериментальных данных по ударному сжатию металлов.

В. УСКОРЕНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ ВЗРЫВОМ

10.100. *Aziz A. K., Hurwitz H., Sternberg H. M.*, Phys. Fluids, **4**, 380 (1961).
Energy Transfer to a Rigid Piston under Detonation Loading.
10.101. *Shreffler R. G., Deal W. E.*, Journ. Appl. Phys., **24**, 44 (1953).
Free Surface Properties of Explosive-Driven Metal Plates.
10.102. *Herlach F., Knoepfel H.*, L.G.I. Rep. 65/17, 1965.
Explosive Techniques for Applications in Experimental Physics.
10.103. *Harlow F. H., Pracht W. E.*, Phys. Fluids, 9, 1951 (1966).
Formation and Penetration of High-Speed Collapse Jets.
10.104. *Berger J., Viard J.*, Physique des explosifs solides, Paris, 1962.
10.105. *Balchan A. S., Cowan G. R.*, Rev. Sci. Instr., **35**, 937 (1964).
Method for Accelerating Flat Plates to High Velocity.
10.106. *Bernstein D., Goettelman R. C.*, Rev. Sci. Instr., **37**, 1373 (1966).
Generation of Cylindrically Symmetric Implosions.
10.107. *Rinehart J. S.*, Explosive Working of Metals, Oxford, 1963.
10.108. *Deal W. E.*, Phys. Fluids, **1**, 523 (1958).
Measurement of the Reflected Shock Hugoniot and Isentrope for Explosive Reaction Products.
10.109. *Urbanski T.*, Chemistry and Technology of Explosives, London, 1964.
10.110. *James E.*, Second ONR Symp. on Detonation, Washington D. C., 1955.
Charge Preparation for Precise Detonation Velocity Studies.
10.111. *Teller E., Talley W. K., Higgins G. H., Johnson G. W.*, The Constructive Uses of Nuclear Explosives, New York, 1968.
10.112. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.*, Теория детонации, М., Гостехиздат, 1955.
10.113. *Herlach F.*, в книге Exploding Wires, Vol. 4, New York, 1968, p. 281.
Exploding Wires Detonators for Use in Experimental Physics.
10.114. *Зельдович Я. Б.*, ЖЭТФ, **36**, 782 (1959).
Сходящаяся цилиндрическая детонационная волна.
10.115. *Guerri L., Taroni A.*, Euratom Rep. EUR 1848.e, 1964.
Computation of the Flow behind a Converging Detonation Wave in Cylindrical or Spherical Geometry.

10.116. *Campbell A. W., Davis W. C., Ramsey J. B., Travis J. R.*, Phys. Fluids, 4, 498, 511 (1961).
Shock Initiation of Explosives.

Г. РАЗНОЕ

10.150. *Забабахин Е. И.*, УФН, 85, 721 (1965).
Кумуляция энергии и ее границы.
10.151. *Гречихин А. И., Минько Л. Я.*, ЖТФ, 6, 1169 (1967).
Об аналогии физических процессов, протекающих в импульсном разряде и при воздействии концентрированного лазерного излучения на металлы.
10.152. *Levine A. K.*, Lasers, Vol. 1, New York, 1966.
10.153. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.*, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд-во «Наука», 1966.
10.154. *Chace W. G., Watson E. M.*, AFCRL-67-0556 Report, 1967.
A Bibliography of the Electrically Exploded Conductor Phenomenon (4th ed.).
10.155. *Courant R. D., Friedrichs K. O.*, Supersonic Flow and Shock Waves, New York, 1948.
10.156. Handbook of Chemistry and Physics, 37th ed., Cleveland, 1955.
10.157. *Spitzer L.*, Physics of Fully Ionised Gases, New York, 1956 (см. перевод: *Л. Спитцер*, Физика полностью ионизованного газа, М., «Мир», 1965).

К главе 11

11.1. *Symonds J. L.*, Rep. Progr. Physics, Vol. 18 (Inst. of Physics, London, 1955), p. 83.
Methods of Measuring Strong Magnetic Fields.
11.2. *Бровченко В. Г., Молчанов Ю. Д., Строганов Е. А.*, ПТЭ, № 3, 121 (1966).
Измерение импульсных токов магнитными поясами.
11.3. *Dwight K.*, Journ. Appl. Phys., 38, 1505 (1967).
Experimental Techniques with General Applicability for the Study of Magnetic Phenomena.
11.4. *Foner S.*, Journ. Appl. Phys., 38, 1510 (1967).
Special Magnetic Measurement Techniques.
11.5. *Segre S. E., Allen J. E.*, Journ. Sci. Instr., 37, 369 (1960).
Mahnetic Probes of High Frequency Response.
11.6. *Labuhn F., Weinhardt K.*, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, MPI-PA-5/63 (1963).
Strommessungen an Impulsentladungen mit Rogowski-Spulen.
11.7. *Germain C.*, Nucl. Instr. and Methods, 21, 17 (1963).
Bibliographical Review of the Methods of Measuring Magnetic Fields.
11.8. *Dismukes K., Lott S. H. Jr., Barach J. P.*, Appl. Opt., 5, 1246 (1966).
Faraday Measurements with Pulsed Magnetic Fields.
11.9. *Hayes B.*, Journ. Appl. Phys., 38, 507 (1967).
The Detonation Electric Effect.
11.10. *Горшунов Л. М., Кононенко Г. П., Сиротинин Б. И.*, ЖЭТФ, 53, 818 (1967).
Электромагнитные возмущения при взрывах.
11.11. *Hopkins K. J.*, Culham Lab. Rep. CLM-M48, 1965.
Some Notes on the Use of Hall Generator Probes for Magnetic Field Measurement.
11.12. *Rogowski, Steinhaus*, Arch. Elektrotechn., 1, 141 and 511 (1912).
11.13. *Landolt, Börnstein*, Zahlenwerte und Funktionen, Band I/1, Berlin, 1957.
11.14. *Sommerfeld A.*, Optics, New York, 1952 (см. перевод: *А. Зоммерфельд*, Оптика, ИЛ, 1953).

11.15. *Ferrari L. A.*, *Zucker M. S.*, Rev. Sci. Instr., 40, 925 (1969).
Transient Response of Magnetic Probes.
11.16. *Stevenson R.*, Can. Journ. Phys., 38, 941 (1960).
11.17. *Berglund S.*, *Westerlund S.*, *Svennerstedt S.*, Journ. Sci. Instr., 40, 250 (1963).
A Magnetic Probe for Plasma Measurement.
11.18. *Ashby D. E.*, *Holmes L. S.*, *Kasha M. A.*, Journ. Sci. Instr., **40**, 364 (1963).
A Multi-Coil Magnetic Probe.
11.19. *Lovberg R. H.*, в сб. Plasma Diagnostic Techniques, New York, 1965 (см. перевод: в сб. Диагностика плазмы, под ред. *Р. Ходдлстоуна*, *С. Леонарда*, изд-во «Мир», 1967).
11.20. *Bötticher W.*, в сб. Plasma Diagnostics, Amsterdam, 1968 (см. перевод: *В. Беттихер*, Измерение магнитных полей в плазме, изд-во «Мир», Москва, 1971, стр. 421).
11.21. *Luppi R.*, Thesis, University of Rome, 1965.
Effetto Faraday in Campi Magnetici dell'Ordine dei Magaoersted.
11.22. *Köppendörfer W.*, Inst. Plasmaphysik München Rep. 1/2, 1961.
Induktionsspulen als Messelemente an schnellen stromstarken Gasentladungen.
11.23. *Phillips R. C.*, *Turner E. B.*, Rev. Sci. Instr., 36, 1822 (1965).
Construction and Calibration Techniques of High Frequency Magnetic Probes.
11.24. *Schmied H.*, Zs. angew. Phys., 23, 458 (1967).
Messmethoden zur oszillographischen Registrierung von Vorschungen in schnellen Strosstromentladungen.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г. Кнопфель **Сверхсильные импульсные магнитные поля**

Редактор *В. И. САМСОНОВА*
Художник *Л. М. Муратова*

Художественный редактор *А. Г. Антонова*
Технический редактор *В. П. Сизова*

Сдано в набор 28/I 1972 г. Подписано к печати 10/VII 1972 г.
Бумага № $160 \times 90^1/_{16}$=12,25 бум. л., 24,5. печ. л. Уч.-изд. л., 20,32. Изд. № 2/6326
Цена 2 р. 31 к. Зак. 99

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного знамени Московская типография № 7 «Искра революции»
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Москва, Трехпрудный пер., 9

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: Москва, И-278, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».